Nom :

# Interrogation 5

**Exercice 1** Simplifier les quantités suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=3}^{n-1} 4i-5 = \frac{4(n-1)-5+4\cdot 3-5}{2}\cdot(n-3) = \frac{4n-2}{2}\cdot(n-3) = (2n-1)(n-3)$

   où on a reconnu la somme des termes d'une suite arithmétique (de raison 4)

2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} 5k = 5^n \prod_{k=2}^{n+1} k = 5^n\cdot(n+1)!$

3. $\displaystyle\sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{2^{n-2}-1}{2-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cdot(2^{n-2}-1) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

   où on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $2\neq 1$

4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} 3^{k-1} = 3^{\sum_{k=2}^{n+1} k-1} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$

   où le produit des puissances devient la puissance par la somme, et on reconnaît une somme arithmétique (de raison 1)

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2n)^k = (2n+1)^n$

   par application de la formule du binôme

**Exercice 2** On considère $f : x\mapsto (1+\ln(x))^x$.

1. La fonction $f$ est définie en les $x\in\mathbb{R}$ tels que $1+\ln(x)>0$, donc sur : $]1/e;+\infty[$.

2. Pour tout $x$ dans $D_f$, on a : $f(x)=\exp\left(x\ln(1+\ln(x))\right)$. Donc par composée et produit, $f$ est dérivable sur $D_f$ avec :

$$\forall x>1/e,\ f'(x)=\left(\ln(1+\ln(x))+\frac{1}{1+\ln(x)}\right)(1+\ln(x))^x.$$

3. Par inégalité classique : pour tout $t\in]-1;+\infty[$ on a : $\ln(1+t)\leq t$, avec égalité si, et seulement si, $t=0$. Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ : $x-\ln(x)\geq 1$, avec égalité si, et seulement si, $x=1$. Ce qui prouve bien le minimum de 1 (atteint en 1 seulement).

4. On déduit que pour tout $x \in D_f$ :

$$\ln(1+\ln(x)) + \frac{1}{1+\ln(x)} = \frac{1}{1+\ln(x)} - \ln\left(\frac{1}{1+\ln(x)}\right) \geq 1 > 0$$

ce qui prouve que $f'(x)$ est toujours strictement positif : donc $f$ est strictement croissante sur $]1/e; +\infty[$.

Pas de forme indéterminées pour les limites :

$$\lim_{x\to 1/e} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

**Exercice 3** Déterminer les limites suivantes (en les justifiant) :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^4+1)}{x^2+3}$ :

$$\frac{\ln(x^4+1)}{x^2+3} = \frac{\ln(x^4+1)}{x^4+1} \times \frac{x^4+1}{x^2+3} = \underbrace{\frac{\ln(x^4+1)}{(x^4+1)^{1/2}}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{(1+\frac{1}{x^4})^{1/2}}{1+\frac{3}{x^2}}}_{\to 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^7+12}$ :

$$\frac{e^{x^2}}{x^7+12} = \underbrace{\frac{e^{x^2}}{(x^2)^4}}_{\to+\infty} \times \underbrace{\frac{(x^2)^4}{x^7+12}}_{\to+\infty} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x\ln x+\ln x}{e^x+x\sin x}$ :

$$\frac{x^3-3x\ln x+\ln x}{e^x+x\sin x} = \underbrace{\frac{x^3}{e^x}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{1-\frac{3\ln x}{x^2}+\frac{\ln x}{x^3}}{1+\frac{x}{e^x}\sin x}}_{\to 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x-1}$ :

$$\frac{\ln(x+1)}{e^x-1} = \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{e^x-1}}_{\to 1} \underset{x\to 0}{\to} 1.$$

**Exercice 4** Résoudre le système suivant :

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & -1 \\ x & + & 10y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ & - & 7y & & & = & -3 \\ & + & 7y & & & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ & - & 7y & & & = & -3 \\ & & & & 0 & = & -4 \end{array}\right.$$

donc le système n'a pas de solution.