Nom :

Interrogation 4

Exercice 1 On considère $f : I \to J$, où I, J sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$:

1. (a) f est dérivable en 0 si la limite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

   (b) La tangente demandée a alors pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

2. (a) Tout élément de J possède un unique antécédent par f dans I.

   (b) f^{-1} est dérivable en y_0 si, et seulement si, $f'(x_0) \neq 0$ et alors : $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

3. On applique le théorème de la bijection monotone : g est définie et **continue** (polynôme) sur **l'intervalle** $\mathbb{R}$. Et g y est dérivable (polynôme) avec $g' : x \mapsto 3x^2 + 1 > 0$ donc g est **strictement croissante**. On a enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée).

   Par théorème de la bijection monotone : g réalise une bijection (strictement croissante) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Donner la définition que la courbe de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une asymptote en $+\infty$, et étudier celle (éventuelle) de $x \mapsto \dfrac{2x - 3x^3}{2x^2 + 4}$ en $+\infty$.

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ si : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Cherchons une asymptote. On a pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{2x - 3x^3}{2x^2 + 4} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2x - 3x^3}{2x^3 + 4x} = \frac{-3x^3}{2x^3} \cdot \frac{1 - \frac{2}{3x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{-3}{2} \cdot \frac{1 - \frac{2}{3x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} = -\frac{3}{2}.$$

donc s'il y a une asymptote, sa pente est $-\dfrac{3}{2}$.

Et de même, pour $x \neq 0$:

$$\frac{2x - 3x^3}{2x^2 + 4} - \frac{-3x}{2} = \frac{2x - 3x^3}{2x^2 + 4} + \frac{3x}{2} = \frac{2x - 3x^3 + 3x^3 + 6x}{2x^2 + 4} = \frac{4x}{2x^2 + 4} = \frac{\frac{4}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{2} = 0$$

et donc l'ordonnée à l'origine est 0.

Et donc la droite d'équation $y = -\dfrac{3}{2}x$ est asymptote en $+\infty$.

Exercice 3 On pose $f : x \mapsto xe^x$.

1. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (polynôme et fonction usuelle) donc par produit f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :
$$f' : x \mapsto e^x + xe^x = (x+1)e^x$$
et pour les même raisons f' est dérivable, donc f deux fois dérivable, avec :
$$f'' : x \mapsto e^x + (x+1)e^x = (x+2)x^x.$$

2. Montrons par récurrence que f est n fois dérivable avec $f^{(n)} : x \mapsto (x+n)e^x$:
   - initialisation : c'est vrai pour $n = 0$, et même pour $n = 1$ et $n = 2$ par la question 1 ;
   - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons f n-fois dérivable avec $f^{(n)} : x \mapsto (x+n)e^x$. Alors par produit de fonctions dérivables, $f^{(n)}$ est dérivable, c'est-à-dire que f est $(n+1)$-fois dérivable, avec :
   $$f^{(n+1)} : x \mapsto e^x + (x+n)e^x = (x+n+1)e^x$$
   ce qui conclut l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence.

Exercice 4

Donner la formule du binôme :
$$\forall a, b \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$
Donner la factorisation de $a^n - b^n$:
$$\forall a, b \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right).$$
Donner la formule de Pascal :
$$\forall k, n \in \mathbb{N},\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Exercice 5 Compléter les formules suivantes :
$$\sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j} \right)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$