Nom :

Interrogation 2

Exercice 1 1. Écrire la définition de “f réalise une bijection de I dans J”.

2. La fonction $x \mapsto x^2$ réalise-t-telle une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$? Et de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$?

1. La fonction f réalise une bijection de I dans J si tout élément de J possède un unique antécédent par f dans I.

2. Elle ne réalise une bijection dans aucun cas :
   - premier cas : 1 possède deux antécédents dans $\mathbb{R}$ (à savoir 1 et -1), donc pas de bijection ;
   - second cas : -1 ne possède aucun antécédent dans $\mathbb{R}_+$ (un carré de réel étant toujours positif ou nul).

Exercice 2 Soit f fonction définie sur un ensemble $\mathbb{R}$.

1. Écrire en symboles mathématiques les assertions “la fonction f est décroissante” et sa négation.
2. Faire de même avec l’assertion “la fonction f est strictement croissante”.
3. Montrer que, si f est strictement croissante, alors elle n’est pas décroissante.
4. Que penser de la réciproque ?

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
   Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ et $f(x) < f(y)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
   Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R},\ x < y$ et $f(x) \geq f(y)$
3. Soit f strictement croissante. Avec $x = 0$ et $y = 37$ on a : $x < y$, et ainsi :
   - par définition des inégalités larges : $x \leq y$;
   - par stricte croissance de f : $f(x) < f(y)$

   ce qui prouve bien que f n’est pas décroissante.
4. La réciproque est fausse : pour cela, il suffit de montrer qu’il existe des fonctions qui ne sont ni décroissante, ni strictement croissante. La fonction $f : x \mapsto x^2$ convient car :
   - elle n’est pas décroissante : avec $x = 0$ et $x = 37$ on a bien $x \leq y$ mais $f(x) = 0 < 1369 = f(y)$;
   - elle n’est pas strictement croissante : avec $x = -1$ et $y = 0$ on a bien $x < y$ mais $f(x) = 1 \geq 0 = f(y)$.

Exercice 3 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la valeur absolue de x.

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

   (a) Écrire la définition de "f est minorée" et de "f n'est pas minorée". Dire si la fonction valeur absolue est minorée, et le prouver.

   (b) Écrire la définition de "f est majorée" et de "f n'est pas majorée". Dire si la fonction valeur absolue est majorée, et le prouver.

1. La valeur absolue de x est le réel positif : $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$.

2. (a) "f est minorée" : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq m$.
   "f n'est pas minorée" : $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < m$.
   La valeur absolue est minorée par 0 : soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
   - si $x \geq 0$: $|x| = x \geq 0$;
   - sinon : alors $x \leq 0$ et $|x| = -x \geq 0$.

   (b) "f est majorée" : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$.
   "f n'est pas majorée" : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > M$.
   La valeur absolue n'est pas majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$. Alors avec $x = |M| + 1$ on a : $x \geq 0$ donc $|x| = x = |M| + 1 \geq M + 1 > M$. Ce qui prouve l'assertion.

Exercice 4 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la partie entière de x.

2. Résoudre l'équation $\lfloor 3x + 2 \rfloor = 4$.

1. La partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x, c'est-à-dire l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$.

2. Par équivalences :

$$\lfloor 3x + 2 \rfloor = 4 \Leftrightarrow 4 \leq 3x + 2 < 5 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x < 1$$

   et donc l'ensemble solution est $[2/3; 1[$.