Interrogation 20

Exercice 1 On considère différents dés à 6 faces : $n \in \mathbb{N}^*$ dés sont équilibrés et $m \in \mathbb{N}^*$ tombent toujours sur 6. On choisit un dé au hasard qu'on lance ensuite.

1. Quelle est la probabilité de faire un 6 ?
2. Le montant vaut 1 : quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
3. Même question si le montant vaut 6.

1. On note T l'événement "le dé choisi est le dé truqué" et S l'événement "le dé choisi tombe sur 6". Par formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(T, \overline{T})$, on a :

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(S) + \mathbb{P}(\overline{T})\mathbb{P}_{\overline{T}}(S)$$

où $\mathbb{P}(T) = \dfrac{m}{n+m}$, $\mathbb{P}(\overline{T}) = \dfrac{n}{n+m}$ (par équibrobabilité, comme les dés sont choisis au hasard) et $\mathbb{P}_T(S) = 1$, $\mathbb{P}_{\overline{T}}(S) = \dfrac{1}{6}$ (par description des dés). D'où : $\mathbb{P}(S) = \dfrac{6m+n}{6m+6n}$.

2. Les dés truqués ne tombent que sur 6, donc si le montant vaut 1 le dé n'était pas truqué. Donc la probabilité cherchée est nulle.
3. Par formule de Bayes, la probabilité cherchée est :

$$\mathbb{P}_S(T) = \frac{\mathbb{P}_T(S)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{1 \cdot \dfrac{m}{m+n}}{\dfrac{6m+n}{6m+6n}} = \frac{6m}{6m+n}$$

Exercice 2 Soit $P = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$.

1. La multiplicité de 1 comme racine de P.
2. En déduire la factorisation de P comme produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. En déduire la factorisation de P comme produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

1. On évalue et on dérive en 1. On a : $P(1) = 1 + 2 - 8 + 5 = 0$.

   Puis $P' = 4X^3 + 4X - 8$ donc $P'(1) = 0$.

   Puis $P'' = 12X + 4$ donc $P''(1) = 16 \neq 0$.

   Donc 1 est racine double de P.

2. Comme 1 est racine double, P est divisible par $(X-1)^2$. On pose la division euclidienne, ce qui donne $P=(X-1)^2(X^2+2X+5)$. C'est la factorisation en irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ comme X^2+2X+5 n'a pas de racine réelle.

3. Il suffit de factoriser X^2+2X+5 sur $\mathbb{C}[X]$, ce qu'on fait avec ses racines. On voit directement la forme canonique :

$$X^2+2X+5=(X+1)^2+4=(X+1-2i)(X+1+2i)$$

d'où la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$: $P=(X-1)^2(X-(-1+2i))(X-(-1-2i))$.

Exercice 3 Soit $P=X^3-1$.

1. Donner la factorisation de P comme produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
2. La fraction rationnelle $\dfrac{X^3-X}{X^3-1}$ est-elle irréductible ?
3. Donner sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
4. Faire de même sur $\mathbb{R}$.

1. On a 1 comme racine évidente puis :

$$P=(X-1)(X^2+X+1)=(X-1)(X-e^{2i\pi/3})(X-e^{-2i\pi/3})$$

qui sont les deux factorisations voulues (X^2+X+1 n'ayant pas de racine réelle).

2. On peut simplifier par $X-1$ ce qui donne : $\dfrac{X^3-X}{X^3-1}=\dfrac{X^2+X}{X^2+X+1}=\dfrac{X(X+1)}{X^2+X+1}$ qui elle est bien irréductible (aucun facteur du dénominateur n'apparaît dans la décomposition en irréductibles du numérateur).

3. On a 1 comme partie entière (en regardant les monômes dominants), donc cette décomposition est de la forme :

$$\frac{X^2+X}{X^2+X+1}=1+\frac{-1}{X^2+X+1}=1+\frac{a}{X-e^{2i\pi/3}}+\frac{b}{X-e^{-2i\pi/3}}$$

et en faisant tendre X vers $e^{\pm 2i\pi/3}$ on trouve directement $a=\dfrac{-1}{e^{2i\pi/3}-e^{-2i\pi/3}}=i\sqrt{3}/3$ et $b=-i\sqrt{3}/3$ d'où la décomposition :

$$\frac{X^3-X}{X^3-1}=1+\frac{i\sqrt{3}/3}{X-e^{2i\pi/3}}+\frac{-i\sqrt{3}/3}{X-e^{-2i\pi/3}}.$$

4. C'est la première écriture ci-dessus : $\dfrac{X^3-X}{X^3-1}=1+\dfrac{-1}{X^2+X+1}$.

Exercice 4 Soit $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y+z+t = x+2y+3z+4t = 0\}$.

1. Montrer que H est un plan de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.
2. En déduire avec le moins de calculs possibles que la famille $((19,-30,3,8),(6,-8,-2,4))$ est une base de H.

1. On résout le système associé. On trouve :

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x+2y+3z+4t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -y-z-t = z+2t \\ y &= -2z-3t \end{cases}$$

donc $H = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

La famille donnée est une base : génératrice (par construction) et libre (deux vecteurs non proportionnels). C'est donc une base. Étant de cardinal 2, on déduit que H est un plan.

2. La famille de l'énoncé est libre (constituée de deux vecteurs clairement non proportionnels en regardant les signes des coordonnées). Comme H est de dimension 2, il suffit de vérifier que les deux éléments sont dans H, ce qui est bien le cas car :

$$19-30+3+8 = 0 = 19-60+9+32 \text{ et } 6-8-2+4 = 0 = 6-16-6+16$$

La famille est donc une famille libre constituée de deux éléments de H, et H de dimension 2 : c'est donc une base de H.