Nom :

Interrogation 1

Exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère l'assertion :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow (x = 0)\,.$$

1. Si pour tout ε strictement positif, la valeur absolue de x est inférieure ou égale à ε, alors x est nul.
2. Français : Pour tout ε strictement positif, la valeur absolue de x est inférieure ou égale à ε et x est non nul.
   Mathématique : $(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon)$ et $(x \neq 0)$.
3. Français : si x est non nul, alors il existe ε strictement positif tel que la valeur absolue de x est supérieure strictement à ε.
   Mathématiques : $(x \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ |x| > \varepsilon)$.
4. On prouve l'assertion par contraposée. Supposons que $x \neq 0$. Posons $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2} > 0$ (car $|x| > 0$). Et un tel ε vérifie bien $|x| > \varepsilon$.
   Ce qui prouve la contraposée. D'où l'assertion de départ.

Exercice 2 Soit $t \in [0;1]$. Montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - nt \leq (1-t)^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ (1-t)^n \leq \dfrac{1}{1+nt}$

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ pour les deux questions.

1. Initialisation : pour $n = 0$, on a : $1 - nt = 1$ et $(1-t)^n = 1$ ce qui prouve l'inégalité (qui est même une égalité).
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 - nt \leq (1-t)^n$. Comme $(1-t) \geq 0$, on déduit :
   $$(1-t)^{n+1} = (1-t)^n(1-t) \overset{HR}{\geq} (1-nt)(1-t) = 1 - (n+1)t + nt^2 \geq 1 - (n+1)t$$
   ce qui prouve l'hérédité.
   D'où la récurrence.
2. Initialisation : pour $n = 0$, on a : $(1-t)^n = 1$ et $\dfrac{1}{1+nt} = 1$ ce qui prouve l'inégalité (qui est même une égalité).
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1-t)^n \leq \dfrac{1}{1+nt}$. Comme $(1-t) \geq 0$, on déduit :
   $$(1-t)^{n+1} = (1-t)^n(1-t) \overset{HR}{\leq} \frac{1-t}{1+nt} = \frac{(1-t)(1+(n+1)t)}{(1+nt)(1+(n+1)t)} = \frac{1+nt-(n+1)t^2}{(1+nt)(1+(n+1)t)}$$
   $$\leq \frac{1+nt}{(1+nt)(1+(n+1)t)} = \frac{1}{1+(n+1)t}$$
   ce qui prouve l'hérédité.
   D'où la récurrence.

Exercice 3 Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, et le prouver :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x + 12 \neq 0 \text{ ou } x + 37 \neq 0)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R},\ x + y + z = 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R},\ x + y + z = 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},\ x + y + z = 0$

1. C'est vrai : soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $x + 12 = 0$. Alors $x = -12$ puis $x + 37 = -12 + 37 = 25 \neq 0$. Ce qui prouve la disjonction.
2. C'est vrai : soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $z = -x - y$ vérifie bien $x + y + z = 0$, ce qui prouve l'existence voulue.
3. C'est faux : montrons la négation, à savoir : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ x + y + z \neq 0$

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Avec $y = -x$ et $z = 1$ on a : $x + y + z = 1 \neq 0$, ce qui prouve le résultat.
4. C'est faux : par l'absurde, supposons que de tels x et y existent.

   On a alors $x + y + 0 = 0$ donc $x + y = 0$ (avec $z = 0$) et également $x + y + 37 = 0$ donc $x + y = -37$ (avec $z = 37$). Et donc $= -37$. D'où la contradiction.

Exercice 4 1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n ou $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

1. Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On écrit alors : $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ sous forme irréductible, c'est-à-dire que $a, b \in \mathbb{N}$ sont sans diviseur commun autre que 1.

   En élevant au carré, il vient : $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, et donc :

   — $a^2 = 2b^2$ est pair, donc a est pair, et on peut écrire $a = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$;

   — en réinjectant, il vient : $b^2 = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{(2n)^2}{2} = \dfrac{4n^2}{2} = 2n^2$ est pair, donc b est pair.

   D'où la contradiction, car alors 2 diviserait a et b.
2. Par l'absurde, supposons que n et $2n$ sont des carrés d'entiers. Notons $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $n = a^2$ et $2n = b^2$.

   Comme $n \neq 0$, alors nécessairement $a, b \in \mathbb{N}^*$. On peut donc diviser les deux égalités, ce qui donne :

$$2 = \frac{2n}{n} = \frac{b^2}{a^2}$$

   puis $\sqrt{2} = \dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$. D'où la contradiction.