Nom :

Interrogation 19

Exercice 1 1. Par double implication :

- si Imp = Imq : les rôles de p et q sont symétriques donc il suffit de montrer l'une des égalités. Soit $x \in E$. Alors $q(x) \in \text{Im}q = \text{Im}p$ donc $p(q(x)) = q(x)$. Et donc $p \circ q = q$.
- si ($p \circ q = q$ et $q \circ p = p$) : par symétrie il suffit de montrer une inclusion : soit $x \in \text{Im}p$. Alors $x = p(x) = q \circ p(x) = q\left(p(x)\right) \in \text{Im}q$. Donc $\text{Im}p \subset \text{Im}q$.

2. Par double implication :

- si Ker$p$ = Ker$q$: par symétrie il suffit de montrer l'une des égalités. Soit $x \in E$. Alors $(p(x) - x) \in \text{Ker}p = \text{Ker}q$. Donc $q(p(x) - x) = 0$, puis $q \circ p(x) = q(x)$. Donc $q \circ p = q$.
- si ($p \circ q = p$ et $q \circ p = q$) : par symétrie il suffit de montrer une inclusion. Soit $x \in \text{Ker}p$: alors $q(x) = q \circ p(x) = q(p(x)) = q(0) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}q$. Donc $\text{Ker}p \subset \text{Ker}q$.

Exercice 2 Posons $\varphi : x \mapsto (f(x) - f'(x))\exp(x)$. Par combinaison linéaire et produit, φ est dérivable sur $[a;b]$ avec : $\varphi' : x \mapsto (f'(x) - f''(x) + f(x) - f'(x))\exp(x) = (f(x) - f''(x))\exp(x)$.

Mais $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Par théorème de Rolle appliqué à φ entre a et b, il existe $c \in]a;b[$ tel que $\varphi'(c) = (f(c) - f''(c))\exp(c) = 0$, et ainsi $f(c) = f''(c)$.

Exercice 3 On va appliquer le théorème de Rolle aux dérivées successives de f pour construire récursivement une suite finie d'éléments $b_0, \dots, b_n$ tels que :

$$\forall i \in [\![0;n]\!],\ f^{(i)}(b_i) = 0 \text{ et } b_i \in]a;b_{i-1}[$$

(avec l'abus de notation $b_{-1} = +\infty$)

- pour $i = 0$: $b_0 = b$ convient ;
- soit $i \in [\![0;n-1]\!]$; supposons b_i construit : la fonction $f^{(i)}$ est dérivable sur $[a;b]$ (comme $i < n$) et vérifie $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b_i) = 0$. Par théorème de Rolle, il existe $d \in]a;b_i[$ tel que $f^{(i+1)}(d) = 0$. Et alors $b_{i+1} = d$ convient.

D'où la construction des b_i.

Et $c = b_n$ convient.

Exercice 4 1. Procédons par analyse–synthèse :

- analyse : soit P solution : alors $P = 0$ ou $\deg(P \circ P) = \deg(P)^2 = \deg(P)$ donc $\deg(P) \leqslant 1$ (dans tous les cas).
- synthèse : soit $P \in \mathbb{K}_1[X]$. On pose $P = aX + b$, et alors :

$$P \circ P = P \Leftrightarrow a(aX+b)+b = aX+b \Leftrightarrow a(a-1)X+ab = 0 \Leftrightarrow a(a-1) = ab = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} & a = 0 \\ \text{ou} & a = 1 \text{ et } b = 0 \end{array} \right.$$

par égalité coefficient par coefficient.

Conclusion : les solutions sont X et les polynômes constants.

2. On procède de même :

- analyse : soit P solution : $\deg(P(X^2)) = 2\deg(P) = \deg((X^2+1)P) = 2+\deg(P)$ donc $P=0$ ou $\deg(P)=2$. Donc $\deg(P) \leqslant 2$ (dans tous les cas).
- synthèse : soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. On pose $P = aXx^2 + bX + c$, et alors :

$$P \text{ solution} \Leftrightarrow aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2+bX+c) = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$$
$$\Leftrightarrow b = a+c = 0 \Leftrightarrow P = a(X^2-1)$$

par égalité coefficient par coefficient.

Conclusion : les solutions sont les polynômes de la forme $a(X^2-1)$ pour $a \in \mathbb{K}$.

Exercice 5 Dans chaque cas, les fonctions sont deux fois dérivables dont on déduit la convexité du signe de leur dérivée seconde :

1. $\ln'' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} < 0$ donc la fonction ln est concave, et ainsi :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in]0;1[,\ \ln(tx+(1-t)y) \geqslant t\ln(x) + (1-t)\ln(y) = \ln(x^t y^{1-t})$$
ce qui donne bien l'inégalité voulue, en appliquant la fonction exp qui est (strictement) croissante.
2. La fonction f est deux fois dérivable sur $]1;+\infty[$ par composée bien définie de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, avec :
$$f' : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)} \text{ puis } f'' : x \mapsto -\frac{\ln(x)+1}{x^2\ln^2(x)} < 0$$
donc f est concave sur $]1;+\infty[$.

   Par définition, avec $t = 1/2$:
$$\forall x, y \in]1;+\infty[,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} = \ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right)$$
ce qui donne à nouveau l'inégalité voulue en appliquant exp.

Exercice 6

1. Comme f n'est pas décroissante, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :
$$a < b \text{ et } f(a) < f(b)$$
et ainsi, pour tout $x > b$, comme la courbe d'une fonction convexe est au-dessus de ses sécantes (ou par inégalité des pentes) :
$$f(x) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b)$$
où le membre de droite tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (comme $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$ par hypothèse).

   D'où le résultat par divergence par minoration.
2. Par contraposée du point précédent, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \neq +\infty$, on déduit que f est décroissante.

   Par limite monotone : elle tend vers sa borne inférieure, donc un minorant.

   Or, elle tend vers 0, qui est donc un minorant : donc f est bien positive.
3. Pour un tel g, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0;1]$ on a par convexité de f :
$$g(tx+(1-t)y) = f(tx+(1-t)y) - a(tx+(1-t)y) - b \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) - a(tx+(1-t)y) - b = t\left(f(x) - (ax +\right.$$
ce qui prouve la convexité de g.

4. On applique les deux questions précédentes.

   Soit f convexe admettant pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$. Alors en posant $g : x \mapsto f(x) - (ax + b)$, on a bien que g est convexe (par la question 3) et tend vers 0 en $+\infty$ (par définition de l'asymptote) donc est positive (par la question 2).

   La positivité de g donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - (ax + b) \geqslant 0 \text{ donc } f(x) \geqslant ax + b$$

   ce qui donne bien que la courbe de f est au-dessus de son asymptote.

Exercice 7 1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit et composée) avec :

$$f' : x \mapsto (1 + 2x^2)e^{x^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (par produit et composée, pas de FI), on déduit par théorème de la bijection monotone (f étant continue sur $\mathbb{R}$ par produit et composée) que f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Par produit et composée, la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$. Comme de plus f' ne s'annule jamais, alors f^{-1} est également $\mathcal{C}^\infty$, donc f et f^{-1} admettent des dl à tout ordre en tout point par formule de Taylor–Young.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)e^{(-x)^2} = -xe^{x^2} = -f(x)$$

   donc f est impaire.

   En tant que bijection réciproque de f, f^{-1} est donc également impaire.

   Remarque : on peut refaire au besoin la preuve. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = f^{-1}(y)$ (de sorte que $y = f(x)$). Alors par imparité de f :

$$f(-x) = -f(x) = -y$$

   donc $-x$ est l'antécédent de $-y$ par f, ce qui assure par définition que $-f^{-1}(y) = -x = f^{-1}(-y)$, donc f^{-1} est impaire.

4. Comme $f(0) = 0$, on déduit le dl5 en 0 de f^{-1} de celui de f. Comme f^{-1} est impaire, alors son dl5 en 0 est de la forme :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to0}{=} ax + bx^3 + cx^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

   On a par dl de l'exponentielle en 0 (et composition à droite et produit) :

$$f(x) \underset{x\to0}{=} x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

   et en utilisant que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ on déduit :

   - avec la première écriture :

$$x \underset{x\to0}{=} x + \mathrm{o}(x^5) \underset{x\to0}{=} af(x) + bf(x)^3 + cf(x)^5 + \mathrm{o}(f(x)^5) \underset{x\to0}{=} ax + (a+b)x^3 + (a/2 + 3b + c)x^5 + \mathrm{o}(x^5)$$

     et par unicité d'un dl on déduit :

$$a = 1,\ a + b = 0 \text{ et } a/2 + 3b + c = 0$$

     donc :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to0}{=} x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

- avec la seconde écriture :

$$x \underset{x\to 0}{=} x+\mathrm{o}(x^5) \underset{x\to 0}{=} f^{-1}(x)+f^{-1}(x)^3+\frac{1}{2}f^{-1}(x)^5 \underset{x\to 0}{=} ax+(a^3+b)x^3+(a^5/2+3a^2b+c)+\mathrm{o}(x^5)$$

et par unicité d'un dl on déduire :

$$a=1,\ a^3+b=0 \text{ et } a^5/3+3a^2b+c=0$$

et on retrouve comme ci-dessus :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x-x^3+\frac{5}{2}x^5+\mathrm{o}(x^5).$$

Exercice 8 On a par dl2 de l'exponentielle en 0 :

$$f(x)=(x+1)e^{1/x} \underset{x\to+\infty}{=} (x+1)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}(x^{-2})\right) \underset{x\to+\infty}{=} x+2+\frac{3}{2x}+\mathrm{o}(1/x)$$

et ainsi la droite d'équation $y=x+2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, et comme $f(x)-(x+2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2x}>0$ on déduit que la courbe de f est au-dessus de son asymptote.

Exercice 9 On détermine à chaque fois $X(\Omega)$, puis on regroupe les probabilités :

1. X suit une loi uniforme sur $[\![1;20]\!]$ donc $Y=\sqrt{X}$ est à valeurs dans $[\![1;4]\!]$. Et on a :

$$\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(1\leqslant X\leqslant 3)=\frac{3}{10},\ \mathbb{P}(Y=2)=\mathbb{P}(4\leqslant X\leqslant 8)=\frac{5}{20},$$
$$\mathbb{P}(Y=3)=\mathbb{P}(9\leqslant X\leqslant 15)=\frac{7}{20} \text{ et } \mathbb{P}(Y=4)=\mathbb{P}(16\leqslant X\leqslant 20)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}.$$

2. X suit une loi uniforme sur $[\![1;6n]\!]$ ($n\in\mathbb{N}^*$) donc $Z=\cos\left(\frac{\pi X}{3}\right)$ est à valeurs dans $\{\pm 1,\pm\frac{1}{2}\}$. Et on a :

$$\mathbb{P}(Z=1/2)=\mathbb{P}(X\equiv\pm 1[6])=\frac{2n}{6n}=\frac{1}{3},\ \mathbb{P}(Z=-1/2)=\mathbb{P}(X\equiv\pm 2[6])=\frac{2n}{6n}\frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(Z=1)=\mathbb{P}(X\equiv 0[6])=\frac{n}{6n}=\frac{1}{6} \text{ et } \mathbb{P}(Z=-1)=\mathbb{P}(X\equiv 3[6])=\frac{n}{6n}=\frac{1}{6}.$$

Exercice 10

1. Les boules étant indiscernables, A et B suivent des lois uniformes sur $[\![1;n]\!]$:

$$\forall k\in[\![1;n]\!],\ \mathbb{P}(A=k)=\mathbb{P}(B=k)=\frac{1}{n}.$$

2. Par définition du maximum :

$$\forall k\in[\![1;n]\!], (X\leqslant k)=(A\leqslant k)\cap(B\leqslant k) \text{ et } (X\geqslant k)=(A\geqslant k)\cup(B\geqslant k)$$

3. Par indépendance des tirages, on déduit :

$$\forall k\in[\![1;n]\!], \mathbb{P}(X\leqslant k)=\mathbb{P}(A\leqslant k)\cdot\mathbb{P}(B\leqslant k)=\frac{k^2}{n^2}$$

On utilise ensuite que, par union disjointe :

$$\forall k\in[\![1;n]\!], \mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X\leqslant k)-\mathbb{P}(X\leqslant k-1)$$

et en réinjectant le résultat précédent :

$$\forall k\in[\![1;n]\!], \mathbb{P}(X=k)=\frac{k^2-(k-1)^2}{n^2}=\frac{2k-1}{n^2}.$$

On vérifie la normalisation en reconnaissant une somme arithmétique.