Nom :

Interrogation 19

Entourez le dinosaure que vous préférez entre les deux suivants :

Ankylosaure Tricératops

Faire de même avec les deux suivants :

Ptérodactyle Spinosaure.

Exercice 1 Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que :

1. $\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}q \Leftrightarrow (p \circ q = q \text{ et } q \circ p = p)$;
2. $\mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}q \Leftrightarrow (p \circ q = p \text{ et } q \circ p = q)$.

Exercice 2 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, telle que : $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(c) = f''(c)$ (on pourra utiliser $\varphi : x \mapsto (f(x) - f'(x))\exp(x)$).

Exercice 3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction n-fois dérivable telle que :

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 4 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$, en commençant par étudier le degré de P :

1. $P \circ P = P$;
2. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 5 Dans chaque cas, étudier la convexité des fonctions suivantes et en déduire les inégalités associées :

1. ln puis :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in]0; 1[,\ x^t y^{1-t} \leqslant tx + (1 - t)y;$$
2. $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ puis :
$$\forall x, y \in]1; +\infty[,\ \ln\left(\frac{x + y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)};$$

Exercice 6 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe qui n'est pas décroissante. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. En déduire que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et vérifie $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors f est positive.
3. Montrer que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction $g : x \mapsto f(x) - (ax + b)$ est également convexe.
4. En déduire qu'une fonction convexe est au-dessus de ses asymptotes.

Exercice 7 Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f et f^{-1} admet des développements limités à tout ordre en tout point.
3. Montrer que f^{-1} est impaire.
4. Donner le dl5 de f en 0, puis en déduire celui de f^{-1} en 0.

Exercice 8 Soit $f : x \mapsto (x+1)e^{1/x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Donner le développement asymptotique de f en $+\infty$ à un $\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$ près.
2. En déduire que la courbe de f possède une asymptote en $+\infty$: on donnera son équation, ainsi que la position relative de la courbe de f par rapport à celle-ci.

Exercice 9 1. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[\![1; 20]\!]$. Donner la loi de $Y = \lfloor \sqrt{X} \rfloor$?

2. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[\![1; 6n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Donner la loi de $Z = \cos\left(\dfrac{\pi X}{3}\right)$?

Exercice 10 On considère une urne qui contient n boules indiscernables numérotées de 1 à n. On tire successivement, indépendamment et avec remise deux boules, et on considère X la variable aléatoire du maximum des deux montants.

On note pour simplifier A et B les variables aléatoires de chaque montant.

1. Reconnaître les lois de A et B.
2. Exprimer simplement les événements $(X \geqslant k)$ et $(X \leqslant k)$ à l'aide des événements $(A \leqslant k)$, $(B \leqslant k)$, $(A \geqslant k)$ et $(B \geqslant k)$.
3. En déduire la loi de X.