

Interrogation 17

Exercice 1 On considère $A, B \in \mathbb{K}[X]$: à quelle condition la division euclidienne de A par B est-elle bien définie, et la définir alors.

Elle est définie si $B \neq 0$, et alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

Exercice 2 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner sous forme de somme les développements limités en 0 de $\cos(x)$ à l'ordre $2n$, $\text{sh}(x)$ à l'ordre $2n + 1$ et de $x \mapsto \ln(1 + x)$ à l'ordre n .

2. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\tan(x)$ et le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1 + x}$ en 0.

1. On a directement les formules du cours :

$$\begin{aligned} \cos(x) & \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\ \text{sh}(x) & \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \ln(1+x) & \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

2. Pour $\tan(x)$, on a directement dans le cours :

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Pour $\sqrt{1+x}$, on utilise la formule de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = 1/2$, ce qui donne :

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Exercice 3 1. Rappeler, avec les bonnes hypothèses, le théorème de Rolle. Est-il valable pour une fonction à valeurs complexes ? (si oui, le dire ; si non, le prouver).

2. Rappeler, avec les bonnes hypothèses, le théorème d'inégalité des accroissements finis. Est-il valable pour une fonction à valeurs complexes ? (si oui, le dire ; si non, le prouver)

1. Théorème de Rolle : si f est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Le théorème est faux sur \mathbb{C} : $f : x \mapsto e^{ix}$ vérifie les bonnes hypothèses sur $[0; 2\pi]$, mais sa dérivée est $f' : x \mapsto ie^{ix}$ qui ne s'annule jamais.

Nom : _____

2. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable sur un intervalle I , et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'| \leq M$, alors :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

et le résultat est valable pour les fonctions à valeurs complexes.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction φ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = P + P''$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\deg(\varphi(X^k))$.
3. En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. La dérivation étant linéaire, on déduit par composée que $P \mapsto P''$ est linéaire, puis que $P \mapsto P + P''$ est linéaire (par combinaison linéaire d'applications linéaires).

On a même mieux : comme la dérivation diminue le degré, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et ainsi par les mêmes arguments (composée et combinaison linéaire) φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\varphi(X^k) = X^k + k(k-1)X^{k-2}$$

qui est donc de degré k .

3. On considère la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Son image par φ est une famille graduée : c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Et ainsi, l'image d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$ par φ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$: donc φ est bijective.

En tant qu'endomorphisme, c'est donc un automorphisme.

Exercice 5 1. Soit f deux fois dérivable sur I :

- (a) À quelle condition la fonction $g = \ln \circ f$ est-elle deux fois dérivable ?
 - (b) Montrer alors que g est convexe si, et seulement si : $f'' \cdot f \geq (f')^2$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On pose $g : x \mapsto f(1/x)$ et $h : x \mapsto xf(x)$.
 - (a) Justifier que g et h sont deux fois dérivables, et donner g'' et h'' .
 - (b) En déduire que g est convexe si, et seulement si, h est convexe.

1. (a) Par composition d'applications deux fois dérivables (f et \ln), g est deux fois dérivable si, et seulement si, \ln et f sont composables, c'est-à-dire si f est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .
- (b) Par caractérisation de la convexité des fonctions deux fois dérivables, on utilise g'' . On a par dérivée d'une composée puis dérivée d'un quotient :

$$g' = \frac{f'}{f} \text{ et } g'' = \frac{f'' \cdot f - (f')^2}{f^2}$$

et ainsi g'' est du signe de $f'' \cdot f - (f')^2$. Et finalement, g est convexe si, et seulement si, $g'' \geq 0$, ce qui donne la condition demandée.

2. (a) Par composée de fonctions deux fois dérivables (f et $x \mapsto 1/x$), g est deux fois dérivable avec :

$$g' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}f'(1/x) \text{ et } g'' : x \mapsto \frac{2}{x^3}f'(1/x) + \frac{1}{x^4}f''(1/x) = \frac{2f'(1/x) + (1/x)f''(1/x)}{x^3}$$

où on utilise aussi la formule du produit pour calculer g'' . Et par produit de fonctions deux fois dérivables (f et id), h est deux fois dérivable avec :

$$h' : t \mapsto f(t) + tf'(t) \text{ et } h'' : t \mapsto 2f'(t) + tf''(t).$$

Et finalement, par caractérisation de la convexité des fonctions deux fois dérivables, on a :

- g convexe si, et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $2f'(1/x) + (1/x)f''(1/x) \geq 0$;
- h convexe si, et seulement si : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $2f'(t) + tf''(t) \geq 0$;

Et ces assertions sont bien équivalentes en procédant au changement de variable $t = 1/x$ (l'application $x \mapsto 1/x$ réalisant une bijection de \mathbb{R}_+^* dans lui-même).

Et on a écrit avec des “x” et des “t” les assertions pour mieux voir le changement de variable, mais le choix de noms différents est licite parce que l'on a des variables muettes locales.