Nom :

Interrogation 17

Exercice 1 On considère $A, B \in \mathbb{K}[X]$: à quelle condition la division euclidienne de A par B est-elle bien définie, et la définir alors.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner sous forme de somme les développements limités en 0 de $\cos(x)$ à l'ordre $2n$, $\text{sh}(x)$ à l'ordre $2n+1$ et de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre n.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\tan(x)$ et le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$ en 0.

Exercice 3

1. Rappeler, avec les bonnes hypothèses, le théorème de Rolle. Est-il valable pour une fonction à valeurs complexes ? (si oui, le dire ; si non, le prouver).
2. Rappeler, avec les bonnes hypothèses, le théorème d'inégalité des accroissements finis. Est-il valable pour une fonction à valeurs complexes ? (si oui, le dire ; si non, le prouver)

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction φ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = P + P''$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\deg(\varphi(X^k))$.
3. En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5

1. Soit f deux fois dérivable sur I :
   (a) À quelle condition la fonction $g = \ln \circ f$ est-elle deux fois dérivable ?
   (b) Montrer alors que g est convexe si, et seulement si : $f'' \cdot f \geq (f')^2$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On pose $g : x \mapsto f(1/x)$ et $h : x \mapsto xf(x)$.
   (a) Justifier que g et h sont deux fois dérivables, et donner g'' et h''.
   (b) En déduire que g est convexe si, et seulement si, h est convexe.