Nom :

Interrogation 16

Exercice 1 1. On considère $A, B \in \mathbb{K}[X]$: à quelle condition la division euclidienne de A par B est-elle bien définie, et la définir alors.

2. Quelle est la division euclidienne de $3X^4 + X^3 + X^2 + X - 2$ par $X^2 + 1$, et que peut-on en déduire ?

1. Il faut que $B \neq 0$, et alors il existe deux polynômes uniques $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

2. On a directement (en la posant) : $3X^4+X^3+X^2+X-2 = (3X^2+X-2)(X^2+1)+0$ (donc le quotient est $3X^2 + X - 2$ et le reste est nul). Comme le reste est nul, on déduit que $X^2 + 1$ divise $3X^4 + X^3 + X^2 + X - 2$.

Exercice 2 1. Rappeler, avec les bonnes hypothèses, la formule du binôme.

2. Étant donnés $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_l X^l$, donner pour $p \in \mathbb{N}$ l'expression du coefficient de degré p du polynôme PQ.

3. En utilisant les questions précédentes, écrire de deux manière les coefficients du produit $(1+X)^n(1+X)^m$ et en déduire que : $\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{n+m}{p}$.

1. Pour $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

2. Par produit de Cauchy, ce coefficient vaut : $\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k}$ (en complétant au besoin les a_i, b_i par des 0).

3. On a :

   - par puissance $(1+X)^n(1+X)^m = (1+X)^{n+m}$ puis par binôme ce coefficient vaut $\binom{n+m}{p}$;
   - par produit de Cauchy : ce coefficient vaut $\sum_{k=0}^{p} \underbrace{\binom{m}{k}}_{a_k} \underbrace{\binom{n}{p-k}}_{b_{p-k}}$ avec $P = (1+X)^n$ et $Q = (1+X)^m$ et les notations précédentes.

   D'où l'égalité demandée.

Exercice 3 1. Rappeler, avec les bonnes hypothèses, le théorème d'inégalité des accroissements finis.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|1 - \cos(x)| \leq |x|$.

1. Soit f dérivable sur un intervalle I (à valeurs complexes ou réelles), et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'| \leq M$. Alors :

$$\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

2. La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $|\cos'| = |\sin| \leq 1$. Par inégalité des accroissements finis, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |1 - \cos(x)| = |\cos(0) - \cos(x)| \leq 1 \cdot |0 - x| = |x|.$$

D'où l'inégalité demandée.

Exercice 4 1. Rappeler, avec les bonnes hypothèses, la formule de Leibniz (pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$).

2. Donner la dérivabilité et les dérivées successives de $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto x + 1$.

3. En déduire la dérivabilité et les dérivées successives de $h : x \mapsto (x + 1)e^{-x}$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Alors (fg) est de classe $\mathcal{C}^n$ et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

2. Par composée de exp (fonction usuelle) et $x \mapsto -x$ (polynôme) qui sont $\mathcal{C}^\infty$, g est $\mathcal{C}^\infty$ avec : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n e^{-x}$.

   En tant que polynôme, g est $\mathcal{C}^\infty$ avec : $g : x \mapsto x + 1,\ g' : x \mapsto 1$ et pour tout $n \geq 2$: $g^{(n)} = 0$.

3. Par produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, h est $\mathcal{C}^\infty$, avec par formule de Leibniz pour tout $n \in \mathbb{N}$ (il ne reste que les termes pour $k = 0$ et $k = 1$) :

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} f^{(n-k)} = g \cdot f^{(n)} + n g' f^{(n-1)}$$

$$: x \mapsto (-1)^n (x + 1)e^{-x} + n \cdot 1 \cdot (-1)^{n-1} e^{-x} = (-1)^n (x - n + 1)e^{-x}$$

et au passage on vérifie bien sûr la formule pour $n = 0$ et ça marche !

Exercice 5 Montrer que $f : x \mapsto x^3\ln(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et se prolonge à $\mathbb{R}_+$ en une fonction $\mathcal{C}^2$ mais pas $\mathcal{C}^3$.

La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ par produit de telles fonctions sur $\mathbb{R}^* - +$, et on a :

$$f' : x \mapsto x^2 + 3x^2\ln(x),\ \ f'' : x \mapsto 5x + 6x\ln(x) \text{ et } f''' : x \mapsto 11 + 6\ln(x)$$

donc f, f', f'' tendent vers 0 en 0 (par croissances comparées), ce qui assure par théorème du prolongement $\mathcal{C}^2$ que f admet un prolongement $\mathcal{C}^2$ à $\mathbb{R}_+$.

En revanche f''' tend vers $-\infty$ en 0, donc par théorème de la limite de la dérivée, ce prolongement n'est pas trois fois dérivable, donc pas $\mathcal{C}^3$.