Nom :

Interrogation 16

Exercice 1

1. On considère $A, B \in \mathbb{K}[X]$: à quelle condition la division euclidienne de A par B est-elle bien définie, et la définir alors.
2. Quelle est la division euclidienne de $3X^4 + X^3 + X^2 + X - 2$ par $X^2 + 1$, et que peut-on en déduire ?

Exercice 2

1. Rappeler, avec les bonnes hypothèses, la formule du binôme.
2. Étant donnés $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_l X^l$, donner pour $p \in \mathbb{N}$ l'expression du coefficient de degré p du polynôme PQ.
3. En utilisant les questions précédentes, écrire de deux manière les coefficients du produit $(1+X)^n(1+X)^m$ et en déduire que : $\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{n+m}{p}$.

Exercice 3

1. Rappeler, avec les bonnes hypothèses, le théorème d'inégalité des accroissements finis.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|1 - \cos(x)| \leq |x|$.

Exercice 4

1. Rappeler, avec les bonnes hypothèses, la formule de Leibniz (pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$).
2. Donner la dérivabilité et les dérivées successives de $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto x + 1$.
3. En déduire la dérivabilité et les dérivées successives de $h : x \mapsto (x + 1)e^{-x}$.

Exercice 5 Montrer que $f : x \mapsto x^3 \ln(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et se prolonge à $\mathbb{R}_+$ en une fonction $\mathcal{C}^2$ mais pas $\mathcal{C}^3$.