

Interrogation 14

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel :

1. Donner la définition de F et G sont supplémentaires dans E .
2. Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, donner les définitions de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$: comment lit-on sur ces ensembles l'injectivité ou la surjectivité de f ?

1. Pour F, G deux sev de E , ils sont dits supplémentaires dans E si tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .
2. On a :

$$\text{Ker } f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} \text{ et } \text{Im } f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

qui vérifient :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\} \text{ et } f \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im } f = F.$$

Exercice 2 1. Énoncer, avec des quantificateurs, le fait qu'une fonction f définie sur \mathbb{R} tende vers 3 en 0.

2. Soit f continue sur $[-12; 37]$ à valeurs dans $] - 1; 1[$ et (x_n) une suite d'éléments de $[-12; 37]$ quelconque.

(a) Montrer qu'il existe $M \in [0; 1[$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$.

(b) En déduire que la suite $(y_n) = ((f(x_n))^n)$ converge.

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall x \in \mathbb{R}, |x - 0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - 3| \leq \varepsilon$

2. (a) Les fonctions f et $x \mapsto |x|$ sont continues donc $x \mapsto |f(x)|$ est continue (par composée) sur le segment $[-12; 37]$ donc par théorème des bornes atteintes il existe $c \in [-12; 37]$ tel que :

$$\forall x \in [-12; 37], |f(x)| \leq |f(c)|$$

et par propriété de f on a $M = |f(c)| < 1$ donc ce M convient.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|y_n| = |f(x_n)|^n \leq M^n$$

et $M \in [0; 1[$ donc (M^n) tend vers 0, puis (y_n) converge vers 0 par encadrement.

Exercice 3 On considère les ensembles $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g_1 : x \mapsto e^x$ et $g_2 : x \mapsto xe^x$. On pose $\varphi : f \mapsto f'' - 2f' + f$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. En déduire que $F = \{f \in E \mid f'' - 2f' + f = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E . Et montrer que la famille (g_1, g_2) est une base de F . On donnera en particulier, pour $f \in E$, ses coordonnées dans la base (g_1, g_2) le plus simplement possible.
3. La fonction φ est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
4. Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe des uniques $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f - (\lambda g_1 + \mu g_2)$ et sa dérivée s'annulent en 0 (on les donnera explicitement).
5. En déduire que $H = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ est un supplémentaire de F dans E .

1. Pour $f \in E$, les fonctions f'' , f' et f sont infiniment dérivables : par combinaison linéaire, $\varphi(f)$ est donc un élément de E , ce qui assure que φ est bien un élément de $\mathcal{F}(E, E)$.

Reste à prouver la linéarité : soient $f_1, f_2 \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f_1 + \mu f_2) &= (\lambda f_1 + \mu f_2)'' - 2(\lambda f_1 + \mu f_2)' + (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda f_1'' + \mu f_2'' - 2\lambda f_1' - 2\mu f_2' + \lambda f_1 + \mu f_2 \\ &= \lambda(f_1'' - 2f_1' + f_1) + \mu(f_2'' - 2f_2' + f_2) = \lambda\varphi(f_1) + \mu\varphi(f_2) \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité.

Donc φ est bien un endomorphisme de E .

2. On a directement $F = \text{Ker}(\varphi)$ donc c'est un espace vectoriel.

L'équation différentielle qui définit F a pour polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ donc :

$$F = \{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(g_1, g_2)$$

ce qui assure que (g_1, g_2) engendre F . Comme ces fonctions sont non proportionnelles (non nulles toutes les deux, et l'une s'annule et pas l'autre), on déduit que la famille **à deux éléments** associée est libre : c'est donc une base de F .

Pour $f \in F$, si on écrit $f = \lambda g_1 + \mu g_2$, on a en évaluant en 0, et en dérivant puis en évaluant en 0 on a :

$$\lambda = f(0) \text{ et } \lambda + \mu = f'(0)$$

ce qui donne pour coordonnées : $(f(0), f'(0) - f(0))$ dans cette base.

On pourrait trouver d'autres expressions en évaluant en d'autres valeurs qu'en 0.

3. Comme $g_1 \in \text{Ker}\varphi$ et $g_1 \neq 0$, on déduit que $\text{Ker}\varphi \neq \{0\}$: elle n'est pas injective.

Par théorème de Cauchy–Lipschitz : peu importe $h \in E$ (h continue suffit), l'équation $\varphi(f) = h$ possède une solution, ce qui assure la surjectivité.

N'étant pas injective, φ n'est pas bijective.

4. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Posons $h = f - (\lambda g_1 + \mu g_2)$. Alors par linéarité de l'évaluation et de la dérivation :

$$h(0) = h'(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) - \lambda = f'(0) - \lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = f(0) \text{ et } \mu = f'(0) - f(0)$$

ce qui assure l'existence et l'unicité de λ et μ .

5. Et finalement pour tout $f \in E$, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f = (\lambda g_1 + \mu g_2) + (f - (\lambda g_1 + \mu g_2))$$

avec $\lambda g_1 + \mu g_2 \in \text{Vect}(g_1, g_2) = F$ et $f - (\lambda g_1 + \mu g_2) \in H$.

Et ainsi H et F sont supplémentaires dans E .

Remarque : on pouvait se contenter de l'existence (qui assure le caractère générateur) et constater que H et F sont bien en somme directe : un élément de $H \cap F$ est solution de l'équation homogène qui définit F , avec condition initiale $f(0) = f'(0) = 0$ (par définition de H), et le théorème de Cauchy–Lipschitz assure que seule la solution nulle convient alors.