Nom :

Interrogation 10

Exercice 1 Donner un équivalent en a et les limites des quantités suivantes :

1. $a = 0$: $\dfrac{x\tan(x)}{\cos(x)+\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{1} \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \underset{x\to 0}{\to} 0$

2. $a = 3$: $\ln(1+x) - 2\ln(2) = \ln\left(\dfrac{1+x}{4}\right) \underset{x\to 3}{\sim} \dfrac{1+x}{4} - 1 \underset{x\to 3}{\sim} \dfrac{x-3}{4} \underset{x\to 3}{\to} 0$

3. $a = 2$: en posant $x = 2+h$: $\sqrt{x} - \sqrt{2} = \sqrt{2+h} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\left((1+h/2)^{1/2} - 1\right) \underset{h\to 0}{\sim}$
   $\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2}\dfrac{h}{2} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}h}{4} \underset{x\to 2}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}(x-2)}{4} \underset{x\to 2}{\to} 0$

4. $a = +\infty$: $\dfrac{xe^x + e^x\ln(x) - x^5}{x^2 + x^3e^x - \sqrt{x}} \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{xe^x}{x^3e^x} \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to +\infty}{\to} 0$

5. $a = 0^+$: $\dfrac{x\ln(x)}{x^2+x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x\ln(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to 0}{\to} -\infty$

Exercice 2 Soit E un ensemble non vide et A une partie de E.

1. Donner la définition d'un recouvrement de E. À quelle condition $(A, \overline{A})$ est un recouvrement de E ?

2. Donner la définition d'une partition de E. À quelle condition $(A, \overline{A})$ est une partition de E ?

1. Un recouvrement est une famille de sous-ensembles de E dont l'union vaut E.

   La famille $(A, \overline{A})$ est toujours un recouvrement de E : tout élément de E est ou bien dans A, ou bien pas dans A (donc dans $\overline{A}$), donc $E = A \cup \overline{A}$.

2. Une partition est un recouvrement dont les éléments sont tous non vides et deux-à-deux disjoints. Comme A et$\overline{A}$ sont toujours disjoints, la famille $(A, \overline{A})$ est une partition de E si, et seulement si, A et $\overline{A}$ sont non-vides, c'est-à-dire que $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$

Exercice 3 soit A, B, C trois ensembles. On suppose que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

On donne deux preuves :

- Preuve "classique" d'inclusion :
  - $A \subset B$: soit $a \in A$. Alors $a \in A \cup B$. Donc $a \in B \cap C$. Donc $a \in B$. D'où l'inclusion.
  - $B \subset C$: soit $b \in B$. Alors $b \in A \cup B$. Donc $b \in B \cap C$. Donc $b \in C$. D'où l'inclusion.
- Par opérations sur les ensembles :
  - Par définition, on a : $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.
  - Par définition également : $B \cap C \subset B$ et $B \cap C \subset C$.

  Et par transitivité, en combinant ces inclusions avec le fait que $A \cup B = B \cap C$: $A \subset B$ et $B \subset C$.

Exercice 4 Soit $f : E \to F$ une application, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.

1. Donner les définitions de f injective, surjective, bijective.
2. Dire de $f(A)$ et $f(B)$ l'ensemble qui a un sens, et caractériser simplement le fait que y soit un de ses éléments.
3. Dire de $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$ l'ensemble qui a un sens, et caractériser simplement le fait que x soit un de ses éléments.
4. On considère $f : x \mapsto x^2$. Donner sans justifier les ensembles suivants :
   (a) $f(]0;1])$
   (b) $f([-4;7[)$
   (c) $f^{-1}(]0;1])$
   (d) $f([-4,7[)$.

1. f est :
   - injective si tout élément de F possède au plus un antécédent par f dans E ;
   - surjective si tout élément de F possède au moins un antécédent par f dans E ;
   - bijective si tout élément de F possède exactement un antécédent par f dans E.

2. C'est $f(A)$ qui a un sens et on a :

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A,\ y = f(x).$$

3. C'est $f^{-1}(B)$ qui a un sens et on a :

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

4. On a d'après les variations de f :

$f(]0;1]) =]0;1],\ f([-4;7[) = [0;49[,\ f^{-1}(]0;1]) = [-1;0[\cup]0;1]$ et $f^{-1}([-4;7[) =]-\sqrt{7},\sqrt{7}[$.