Nom :

# Interrogation 17

**Exercice 1** On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ses coordonnées dans cette base.
2. En déduire l'expression générale de l'unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ qui vérifie $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = e_3$.
3. Donner le noyau et l'image de $f$.

**Exercice 2** Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, du nombre de solution de l'équation $\ln(x) = ax$.

**Exercice 3** 1. Rappeler, avec les bonnes hypothèses, la formule de Leibniz.

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n$-ème de $x \mapsto (x^2 - 2x + 3)e^x$ (après avoir justifié qu'elle existe bien).

**Exercice 4** Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x}{\ln(x) + 1}$. On pose $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ :

1. Justifier que $(u_n)$ est bien définie.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - e| \leq \dfrac{e-1}{2^n}$.
3. En déduire le comportement de $(u_n)$.