DS commun : analyse et probabilité

Exercice

1. Les boules étant indiscernables au toucher, lors du premier tirage on tire soit la boule blanche avec la probabilité 1/2, soit la boule verte avec la probabilité 1/2 :
   - dans le premier cas : on place alors la boule blanche et une autre boule verte, donc $(X_1 = 1)$;
   - dans le second : on place alors la boule verte et une autre boule blanche, donc $(X_1 = 2)$.

   Et ainsi : $\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}}$.
2. On a les situations suivantes :
   - $X_2 = 1$ si, et seulement si, on n'a jamais rajouté de boule blanche, donc jamais pioché la boule verte, lors des deux premiers tirages donc : $(X_2 = 1) = (B_1 \cap B_2)$;
   - $X_2 = 2$ si, et seulement si, on a pioché une et une seule fois la boule blanche lors des deux premiers tirages donc : $(X_2 = 2) = (\overline{B_1} \cap B_2) \cup (B_1 \cap \overline{B_2})$ (l'union étant disjointe) ;
   - $X_2 = 3$ si, et seulement si, on a toujours rajouté une boule blanche, donc toujours pioché une boule verte, lors des deux premiers tirages donc : $(X_2 = 3) = (\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$.

   Par union disjointe et formule des probabilités composées, on déduit par exemple pour $(X_2 = 2)$:

   $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(X_2 = 2) & = & \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2}) \\ & = & \mathbb{P}(\overline{B_1})\, \mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) + \mathbb{P}(B_1)\, \mathbb{P}_{B_1}(\overline{B_2}) \\ & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3}} \end{array}$$

   et de même

   $$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

   où on a calculé les probabilités conditionnelles en utilisant que les tirages se font au hasard avec des boules indiscernables, donc suivant une probabilité uniforme sur l'ensemble des boules de l'urne.

   Au passage on remarque que la somme de ces probabilités fait bien 1, ce qui est rassurant puisque $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
3. On cherche à calculer $\mathbb{P}(B_2)$. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $((X_1 = 1), (X_1 = 2))$ associé à la variable aléatoire X_1 :

   $$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}_{(X_1=1)}(B_2) + \mathbb{P}(X_1 = 2) \cdot \mathbb{P}_{(X_1=2)}(B_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

   (ce qui n'est pas surprenant du fait des rôles symétriques des couleurs dans l'expérience aléatoire).

4. On veut calculer $\mathbb{P}_{B_2}(X_2 = 2)$, ce qu'on fait par formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{B_2}(X_2 = 2) = \frac{\mathbb{P}_{(X_2=2)}(B_2) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 2)}{\mathbb{P}(B_2)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{8}{9}}$$

5. L'urne contient initialement deux boules dont une blanche, et à chaque tirage on ajoute une boule supplémentaire. Ainsi, avant le $(k+1)$-ème tirage, on a ajouté k boules et l'urne contient donc $k+2$ boules, dont un nombre de boules blanches compris entre 1 et $k+1$. Donc $\boxed{X_k(\Omega) = [\![1; k+1]\!]}$.

6. On traduit, comme indiqué, à l'aide des événements B_i :
   - pour $X_k = 1$: s'il n'y a qu'une boule blanche, c'est qu'on a toujours tiré la boule blanche donc $(X_k = 1) = (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_k)$. Par formule des probabilité composées, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_k = 1) &= \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\,\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3)\,\ldots\,\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{k+1} = \boxed{\frac{1}{(k+1)!}}. \end{aligned}$$

   - pour $X_k = k+1$: en raisonnant de même, on a $(X_k = k+1) = (\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_k})$ et par formule des probabilités composées :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_k = k+1) = \frac{1}{(k+1)!}.}$$

   Pour $k = 1$ on retrouve bien une même probabilités de $\frac{1}{2}$, et pour $k = 2$ de $\frac{1}{6}$ ce qui est cohérent avec les questions 1 et 2.

7. (a) On suppose $X_k = i - 1$: alors $X_{k+1} = i$ si on a augmenté le nombre de boules blanches, c'est-à-dire si on a pioché la boule verte lors du $(k+1)$-ème tirage.
   Mais comme $X_k = i - 1$, lors du $(k+1)$-ème tirage l'urne contient $(i-1)$ boules blanches pour $(k+2)$ boules indiscernables en tout, donc $(k+3-i)$ boules vertes. Par probabilité uniforme, on déduit que :

$$\boxed{\mathbb{P}_{(X_k=i-1)}(X_{k+1} = i) = \frac{k+3-i}{k+2}.}$$

   De même pour $X_k = i$: on veut alors tirer une boule blanche, alors que l'urne contient i boules blanches pour $k+2$ boules en tout donc :

$$\boxed{\mathbb{P}_{(X_k=i)}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2}.}$$

   (b) Le nombre de boules blanches augmente à chaque tirage de 1 ou 0. Ainsi, pour de tels j, les événements $(X_k = j)$ et $(X_{k+1} = i)$ sont incompatibles. Donc $\boxed{\mathbb{P}_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i) = 0}$.

   (c) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_k :

$$((X_k = 1), (X_k = 2), \ldots, (X_k = k+1))$$

et on en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+1}=i) &= \sum_{j=1}^{k+1}\mathbb{P}(X_k=j)\mathbb{P}_{(X_k=j)}(X_{k+1}=i)\\ &= \mathbb{P}(X_k=i)\mathbb{P}_{(X_k=i)}(X_{k+1}=i)+\mathbb{P}(X_k=i-1)\mathbb{P}_{(X_k=i-1)}(X_{k+1}=i)\\ &= \boxed{\frac{i}{k+2}\mathbb{P}(X_k=i)+\frac{k+3-i}{k+2}\mathbb{P}(X_k=i-1)}\end{aligned}$$

en utilisant les deux questions précédentes : la b) assure que tous les termes négligés dans la somme sont nuls ; la a) donne les valeurs des probabilités condionnelles utilisées.

8. (a) D'après la question 7c) avec $i=2$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{k+1}=2)=\frac{2}{k+2}\mathbb{P}(X_k=2)+\frac{k+1}{k+2}\mathbb{P}(X_k=1)$$

ce qui devient par la question 6) et par définition de a_k :

$$\mathbb{P}(X_{k+1}=2)=\frac{2}{k+2}\frac{a_k}{(k+1)!}+\frac{k+1}{k+2}\frac{1}{(k+1)!}=\frac{2a_k+k+1}{(k+2)!}$$

et par définition de a_{k+1} :

$$\boxed{a_{k+1}=2a_k+k+1.}$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a :

$$b_{k+1}=a_{k+1}+(k+1)+2=2a_k+k+1+k+3=2(a_k+k+2)=2b_k$$

donc (b_k) est une suite géométrique de raison 2.

(c) On a : $b_0=a_0+2=2$ (comme $X_0=1$ donc $\mathbb{P}(X_0=2)=0$ puis $a_0=0$).
Par expression d'une suite géométrique, on déduit :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ b_k=2^{k+1}$$

qu'on réinjecte dans l'expression de (a_k) :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ a_k=b_k-k-2=2^{k+1}-k-2$$

puis dans la valeur de $\mathbb{P}(X_k=2)$:

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_k=2)=\frac{2^{k+1}-k-2}{(k+1)!}.}$$

Et on vérifie bien sûr la cohérence avec les questions précédentes : on retrouve bien $\mathbb{P}(X_0=2)=0$, $\mathbb{P}(X_1=2)=\frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2=2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Problème

Partie I : Étude de la fonction réciproque de la fonction th.

1. Les fonctions usuelles sh et ch sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (par combinaison linéaire et composées des fonctions exp et $x \mapsto -x$ qui le sont). De plus ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc th est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par quotient. Par dérivée d'un quotient, on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{th})'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.}$$

   De plus, par imparité de sh et parité de ch on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(-x) = \frac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)} = -\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = -\mathrm{th}(x)$$

   ce qui prouve que th est impaire.

2. De la question précédente, on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{th}'(x) > 0$. Ce qui assure que th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   De plus th est continue sur $\mathbb{R}$ (elle est même $\mathcal{C}^\infty$).
   Et on a les comportements suivants aux bornes de $\mathbb{R}$:
   - en $+\infty$: $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1 \underset{x\to+\infty}{\to} 1$;
   - en $-\infty$: $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{-e^{-x}}{e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} -1 \underset{x\to+\infty}{\to} -1$;

   Par théorème de la bijection monotone, la fonction th réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$.
   On a donc $I =]-1;1[$.

3. En réécrivant $1 = \mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2$, on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$$

   et ainsi $\boxed{\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2}$.

4. Soit $x \in I$. Alors $-x \in I$ (car I est symétrique par rapport à 0).
   De plus, $\mathrm{th}(\mathrm{Argth}(-x)) = -x$ et $\mathrm{th}(-\mathrm{Argth}(x)) = -\mathrm{th}(\mathrm{Argth}(x)) = -x$ (par imparité de th).
   Comme th est injective sur $\mathbb{R}$ (car bijective), on déduit que $\mathrm{Argth}(-x) = -\mathrm{Argth}(x)$.
   Donc Argth est impaire.

5. La fonction th est $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée $\mathrm{th}' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$ ne s'annule jamais : par dérivée d'une bijection réciproque, la fonction Argth est donc également de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   Sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in I,\ \mathrm{Argth}'(x) = \frac{1}{\mathrm{th}' \circ \mathrm{Argth}(x)} = \frac{1}{1 - \mathrm{th}^2 \circ \mathrm{Argth(x)}} = \boxed{\frac{1}{1-x^2}}$$

   ce qui prouve le résultat.

6. Une décomposition en éléments simples donne pour tout $x \in I$:
$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$$
et ainsi, en primitivant terme à terme sur l'intervalle I, il existe un réel C tel que :
$$\forall x \in \,]-1;1[\,, \quad \mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2}\left(\ln|x+1| - \ln|x-1|\right) + C = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) + C.$$
Or $\mathrm{th}(0) = 0$ donc $\mathrm{Argth}(0) = 0$. En réinjectant, on déduit que $C = 0$. Et ainsi :
$$\boxed{\forall x \in I,\ \mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

7. Pour un développement limité, on préfère utiliser pour tout $x \in I$:
$$\mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$$
c'est-à-dire que Argth est la partie impaire sur I de $x \mapsto \ln(1+x)$.
Et en utilisant que :
$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + \mathrm{o}(u^5)$$
on déduit que :
$$\boxed{\mathrm{Argth}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathrm{o}(x^5).}$$
Remarque : on aurait aussi pu utiliser le dl de $\dfrac{1}{1-x^2}$ et le primitiver.

Partie II : Manipulations algébriques autour de th

8. On procède par disjonction de cas :
   — si $y = 1$: on a : $E_y : -2 = 0$ qui n'a pas de solution ;
   — sinon : on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:
   $$(1-y)z^2 - (1+y) = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{1+y}{1-y}$$
   et on est ramené à étudier les racines carrées (complexe) du nombre réel $\dfrac{1+y}{1-y}$, dont on étudie donc le signe. Par étude du signe de $(1+y)$ et $(1-y)$, on trouve directement :
   $$\frac{1+y}{1-y} \geqslant 0 \Leftrightarrow y \in [-1;1[$$
   et finalement les solutions de E_y sont :
   — $\pm\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$ si $y \in [-1;1[$ (il s'agit de la solution double 0 si $y = -1$, et de deux solutions distinctes sinon) ;
   — $\pm i\sqrt{-\dfrac{1+y}{1-y}}$ si $|y| > 1$ (qui sont toujours distinctes).

Autre méthode : dans le second cas, on reconnaît une équation polynomiale du second degré, de discriminant :

$$\Delta = 4(1+y)(1-y) = 4(1-y^2)$$

et ainsi, en étudiant le signe de Δ, on déduit que l'équation E_y :

— admet 0 comme unique solution si $y=-1$ (le cas $y=1$ ayant été traité avant) ;

— a pour solutions $\pm\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$ si $|y|<1$, et $\pm i\sqrt{-\dfrac{1+y}{1-y}}$ si $|y|>1$.

9. Du fait des ensembles solutions précédents, on a directement l'équivalence demandée :

   — si $|y|<1$: l'unique solution strictement positive est $\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$;

   — sinon : soit il n'y a pas de solution (si $y=1$), soit 0 est l'unique solution (si $y=-1$), soit les solutions sont des imaginaires purs (si $|y|>1$).

10. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{th}(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \Leftrightarrow (1-y)e^x - (1+y)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (1-y)e^{2x} - (1+y) = 0$$

et ainsi $\operatorname{th}(x) = y$ si, et seulement si, e^x est solution de l'équation E_y.
Comme exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $\operatorname{th}(x)=y$ a une solution si, et seulement si, l'équation E_y possède une solution dans $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire si, et seulement si, $|y|<1$ par la question précédente.

Pour un tel y, l'unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ de E_y est $\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$. L'équation $\operatorname{th}(x)=y$ possède donc pour unique solution :

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Par définition de Argth, bijection réciproque de rh, on déduit que :

$$\forall y \in I,\ \operatorname{Argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

qui est bien l'expression trouvée en question 6.

Partie III : Étude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle $(E) : x\,y' + 3\,y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

11. La fonction $x \mapsto x$ est continue et ne s'annule pas sur $]0,1[$, donc l'équation à résoudre est équivalent à l'équation :

$$(E') : y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x(1-x^2)}.$$

On reconnaît une équation différentielle **linéaire** du 1^{er} ordre à coefficients continus et on la résout par la méthode du cours : les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{A(x)}$$

où A est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{3}{x}$ sur $]0,1[$. En prenant $A : x \mapsto -3\ln x$, on déduit que ces solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x^3}.$$

Cherchons une solution particulière (E) par variation de la constante. Posons $y_0 : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x^3}$ pour λ fonction dérivable sur $]0;1[$. Une telle fonction y_0 est solution de (E) sur $]0,1[$ si, et seulement si, pour tout x de $]0,1[$:

$$\frac{\lambda'(x)}{x^3} - 3\frac{\lambda(x)}{x^4} + \frac{3}{x}\frac{\lambda(x)}{x^3} = \frac{1}{x(1-x^2)}$$

c'est-à-dire si, et seulement si, λ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x^2} - 1$.

Ainsi $\lambda : x \mapsto \operatorname{Argth}(x) - x$ convient. Et une solution particulière de (E) est donc :

$$x \mapsto \frac{\operatorname{Argth}(x) - x}{x^3}.$$

Et finalement les solutions de (E) sur $]0;1[$ sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \frac{\operatorname{Argth}(x) - x + \lambda}{x^3}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

12. C'est un problème de recollement. Procédons par analyse–synthèse :
    (a) Analyse : soit f une solution de (E) sur $[0;1[$. Alors f est une solution de (E) sur $]0;1[$, et par la question précédente il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

    $$\forall x \in]0;1[,\ f(x) = \frac{\operatorname{Argth}(x) - x + \lambda}{x^3}.$$

    f est aussi solution de (E) en 0, donc $f(0) = \dfrac{1}{3}$.

    De plus f doit être dérivable (donc continue) sur $[0;1[$, et donc notamment en 0. Or d'après le dl de Argth en 0 obtenu à la question 7) on a

    $$f(x) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{x + x^3/3 + x^5/5 + \mathrm{o}(x^5) - x + \lambda}{x^3} \underset{x\to 0^+}{=} \frac{\lambda}{x^3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$$

    Pour que la limite en 0 soit finie, il faut que $\lambda = 0$.

    (b) Synthèse : soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Argth}(x) - x}{x^3} & \text{si} \quad x \in]0;1[\\ 1/3 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

    Alors :
    - f est solution de (E) sur $]0;1[$ (par la question précédente) ;
    - D'après les calculs de l'analyse, f admet un dl1 en 0 de la forme

      $$f(x) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{1}{3} + \mathrm{o}(x) \underset{x\to 0^+}{=} f(0) + \mathrm{o}(x)$$

      donc f est continue et dérivable 0.
    - D'après le choix de la valeur de $f(0) = \dfrac{1}{3}$, f est aussi solution de (E) en 0.

    donc f est solution de (E) sur $[0;1[$.

Et ainsi, la fonction $\boxed{x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Argth}(x) - x}{x^3} & \text{si} \quad x \in]0;1[\\ 1/3 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}}$ est l'unique solution de E sur $[0;1[$.

Partie IV : Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :

"déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$$

13. Soit f constante. Posons $f : x \mapsto \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f \text{ solution} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2-1)=0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, \pm 1\}$$

donc le problème admet trois solutions constantes : les fonctions de valeur 0, 1 ou -1.

14. Nécessairement, si f est solution, en prenant $x = 0$ dans l'équation à satisfaire on a :

$$f(0) = \frac{2f(0)}{1+f(0)^2}$$

donc $f(0)$ vaut 0, 1 ou -1.

Les fonctions constantes de valeur 0, 1 ou -1 sont des solutions au problème prenant respectivement ces valeurs en 0.

Ainsi les valeurs possibles de $f(0)$ pour f solution sont exactement 0, 1 et -1.

15. Supposons f solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(x) = \frac{2a}{1+a^2}$$

où $a = f(x/2) \in \mathbb{R}$. Mais pour un tel a on a :

$$1 + a^2 - 2|a| = (1-|a|)^2 \geqslant 0$$

donc $2|a| \leqslant 1 + a^2$, et ainsi : $\boxed{|f(x)| \leqslant 1}$, ce qui est l'inégalité demandée.

16. Supposons f solution. Posons $g = -f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, comme f est solution :

$$g(2x) = -f(2x) = -\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{2(-f(x))}{1+(-f(x))^2} = \frac{2g(x)}{1+(g(x))^2}.$$

Donc $-f$ est bien solution.

Remarque : on ne demandait de montrer qu'une implication, mais la réciproque est vraie en réappliquant ce résultat à g.

17. Supposons f solution. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $h : x \mapsto f(\lambda x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, comme f est solution :

$$h(2x) = f(\lambda) = f(2\,(\lambda x)) = \frac{2f(\lambda x)}{1+(f(\lambda x))^2} = \frac{2h(x)}{1+(h(x))^2}.$$

Donc $x \mapsto f(\lambda x)$ est bien solution.

18. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on calcule "brutalement" :

$$\frac{2\mathrm{th}(x)}{1+(\mathrm{th}(x))^2} = 2\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \times \frac{(e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2} = 2\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2e^{2x}+2e^{-2x}} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = \mathrm{th}(2x).$$

Donc th est bien solution du problème posé.

19. Soit f une fonction solution et x_0 un réel fixé.

  (a) En reconnaissant une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1;1[$, on a : $\lim \dfrac{x_0}{2^n} = 0$.
  Par continuité de f en 0 (f étant solution au problème, elle est dérivable donc continue en 0) : $\boxed{\lim f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = f(0) = 1}$.
  Donc (u_n) converge vers 1.

  (b) En utilisant la relation vérifiée par f, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\boxed{u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f\left(2 \cdot \frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}.}$$

  comme $1+u_{n+1}^2 > 0$, il est clair que u_{n+1} et u_n sont de même signe ; et par récurrence simple on en déduit que la suite (u_n) est bien de signe constant.

  (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en réinjectant l'expression précédente :

$$u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} = \frac{u_{n+1}^3 - u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} = -u_{n+1}\frac{1-u_{n+1}^2}{1+u_{n+1}^2}$$

  or f est solution, donc d'après la question 15 elle est à valeurs dans $[-1;1]$, d'où $u_{n+1} \in [-1;1]$ et par conséquent $u_{n+1}-u_n$ est du signe de $-u_{n+1}$. D'après la question précédente, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est donc constant et égal au signe de $-u_0$. C'est à dire

  — si $u_0 \geqslant 0$: (u_n) est positive décroissante ;
  — si $u_0 \leqslant 0$: (u_n) est négative croissante.

20. Dans cette question , on suppose par l'absurde que **f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante.**

  (a) Par l'absurde : si un tel x_0 n'existe pas. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a : $f(x_0) = f(0)$. Donc f est constante. D'où la contradiction. Donc un tel x_0 existe.

  (b) On considère la suite u étudiée à la question 19 et définie ici à partir d'un réel x_0 tel que $f(x_0) \neq 1$.
  On procède par disjonction de cas suivant la valeur de $u_0 = f(x_0)$. Notons que l'on sait déjà que $u_0 \in [-1;1[$: c'est une image par f, donc dans $[-1;1]$; et distincte de $f(0)$ donc distincte de 1 :

  — si $u_0 > 0$: (u_n) est décroissante minorée par 0, donc converge vers $\ell \in [0;u_0] \subset [-1;1[$;
  — sinon : (u_n) est croissante majorée par 0, donc converge vers $\ell \in [u_0;0] \subset [-1;1[$.

  Dans les deux cas, on obtient que $\ell < 1$. Or d'après la question 19a) on devrait avoir $\ell = f(0) = 1$. D'où la contradiction !

21. Si $f(0) = -1$, alors $g = -f$ est également solution (par la question 16) et vérifie $g(0) = 1$, ce qui est impossible par la question précédente.

22. Dans cette question, on suppose que **f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$.**

  (a) Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$. Et considérons la suite u associée définie dans la question 19)
  pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$1 - u_n = 1 - \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} = \frac{(1-u_{n+1})^2}{1+u_{n+1}^2}$$

ce qui donne $(1-u_{n+1})^2 = (1-u_n)\left(1+u_{n+1}^2\right)$.
Comme $u_0 = 1$, on obtient $u_1 = 1$. Par récurrence, on montre alors que (u_n) est constante de valeur 1, donc converge vers 1.

Or d'après la question 19), la suite u doit converger vers $f(0)$, c'est à dire 0 ici. On a clairement une contradiction.

(b) D'après la question 16, la fonction $g = -f$ est aussi solution et vérifie $g(0) = -f(0) = 0$, donc le résultat précédent s'applique : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) \neq 1$ et donc $f(x) \neq -1$.

On définit alors la fonction g par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{1}{x}\operatorname{Argth}(f(x)).$$

(c) D'après les questions 15, 22a) et 22b) on sait f est à valeurs dans $]-1;1[$. Comme Argth est définie sur $]-1;1[$, la fonction composée $\operatorname{Argth}\circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Et par quotient avec un dénominateur qui ne s'annule qu'en 0, la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

th et f sont des solutions sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(2\operatorname{Argth}(f(x))) &= \frac{2\operatorname{th}(\operatorname{Argth}(f(x)))}{1+(\operatorname{th}(\operatorname{Argth}(f(x))))^2} \\
&= \frac{2\,f(x)}{1+(f(x))^2} \\
&= f(2x)
\end{aligned}$$

th est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$ et $f(2x) \in]-1;1[$ donc $2\operatorname{Argth}(f(x)) = \operatorname{Argth}(f(2x))$. En divisant par $2x$, on obtient bien

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(2x) = g(x).}$$

(d) f est dérivable en 0 et Argth est dérivable sur $]-1;1[$ et notamment en $f(0) = 0$, donc par composition de fonctions dérivables, $\operatorname{Argth}\circ f$ est dérivable en 0. D'où

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Argth}(f(x)) - \operatorname{Argth}(f(0))}{x} \quad \text{car } f(0)=0 \text{ et } \operatorname{Argth}(0)=0 \\
&= (\operatorname{Argth}\circ f)'(0) = f'(0)\times \operatorname{Argth}'(f(0)) \\
&= \frac{f'(0)}{1-(f(0))^2} = f'(0)
\end{aligned}$$

Ainsi g est prolongeable par continuité en 0 avec $g(0) = f'(0)$.

(e) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{2^n} = 0$ et g est continue en 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = g(0)$.
Par ailleurs, la relation obtenue à la question 22c) permet de montrer que la suite v est constante et égale à $v_0 = g(x)$.
On en déduit donc que $g(x) = g(0)$.

(f) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on vient de voir que $g(x) = g(0)$. Ainsi g est constante.

23. On raisonne par disjonction de cas : d'après la question 14 il n'y a que trois valeurs possibles pour $f(0)$: 1, -1 et 0.

    (a) Si $f(0) = 1$, alors d'après les questions 13) et 20) il n'y a que la fonction constante égale à 1 qui soit solution.

    (b) Si $f(0) = -1$, alors de même d'après les questions 13) et 21) il n'y a que la fonction constante égale à -1 qui soit solution.

    (c) Si $f(0) = 0$, alors on raisonne par analyse–synthèse :

    — analyse : si f est une solution qui vérifie $f(0) = 0$, alors d'après la question 22) il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait $\dfrac{1}{x}\,\mathrm{Argth}(f(x)) = \lambda$ et donc en utilisant la bijectivité de th on obtient $f(x) = \mathrm{th}(\lambda\, x)$. On remarque que pour $x = 0$ cette relation est encore vérifiée puisque $f(0) = 0$ et $\mathrm{th}(0) = 0$.

    — synthèse : Réciproquement pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, d'après les questions 17) et 18) les fonctions $x \mapsto \mathrm{th}(\lambda\, x)$ sont des solutions qui vérifient clairement $f(0) = 0$.

    En conclusion, les fonctions solutions du problème sont :

$$\boxed{x \mapsto 1, \quad x \mapsto -1 \quad \text{et les fonctions de la forme } x \mapsto \mathrm{th}(\lambda x) \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

(le cas $\lambda = 0$ donnant la fonction nulle, qui est la troisième solution constante).