DS commun : analyse et probabilité

Instructions générales :
Aucun document n'est autorisé.
L'emploi d'une calculatrice est interdit.
Les résultats demandés seront $\boxed{\textbf{encadrés}}$ avec une règle, les étapes importantes et les résultats intermédiaires devront être mis en évidence par un **surlignement**, ligne sautée, ou tout autre moyen de votre choix.
Une attention particulière à la rédaction et à l'orthographe est requise : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Chaque réponse doit donner lieu à une démonstration. Les justifications doivent être précises et concises.

Aucun candidat ne sera autorisé à quitter sa place, ni pendant la première heure après l'ouverture de la séance, ni pendant le dernier quart d'heure de l'épreuve.
Dès que le chef de salle annonce la fin de l'épreuve, chaque candidat doit poser son stylo sur la table et remettre trois copies, même blanches. Il emportera ses brouillons et le sujet en quittant la salle.
Il est interdit aux candidats, pendant les épreuves, de communiquer entre eux ou avec l'extérieur.
L'échange de matériel (stylo, règle, calculatrice, etc.) entre candidats au cours de l'épreuve est interdit.
Les casques antibruit sont interdits. Seuls les bouchons auriculaires sont autorisés.

Ce DS sera **IMPÉRATIVEMENT** rendu sur 3 copies séparées :

- sur la COPIE 1 : Exercice
- sur la COPIE 2 : Problème parties I-II
- sur la COPIE 3 : Problème partie III-IV

Sur chacune de ces trois copies, vous indiquerez lisiblement votre NOM en majuscule, votre Prénom en minuscule ainsi que votre classe.

Barème indicatif sur 80 points (donnant une idée du temps respectif qu'il est bon de consacrer à chaque partie :
Ex $\simeq 24$, Pb-I $\simeq 15$, Pb-II $\simeq 8$, Pb-III $\simeq 8$, Pb-IV $\simeq 25$,

---

Exercice :

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule verte indiscernables. On effectue une succession de tirages dans cette urne de la manière suivante :

- on tire une boule au hasard dans l'urne ;
- on remet la boule tirée ;
- on rajoute dans l'urne une boule de la couleur opposée à celle que l'on vient de tirer ; la nouvelle boule rajoutée est indiscernable des autres au toucher.

C'est-à-dire que si à un tirage on tire une boule blanche, on la remet ainsi qu'une boule verte supplémentaire dans l'urne. Et inversement si on tire une boule verte, on la remet ainsi qu'une boule blanche supplémentaire dans l'urne.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant d'effectuer le $(k+1)$ -ème tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$.

Enfin, pour tout $k \geqslant 1$, on notera B_k l'événement "on tire une boule blanche au k-ème tirage".

1. Déterminer la probabilité des événements $(X_1 = 1)$ et $(X_1 = 2)$.
2. Écrire les événements $(X_2 = 1)$, $(X_2 = 2)$ et $(X_2 = 3)$ à l'aide des événements B_i et $\overline{B_i}$. En déduire la probabilité des événements $(X_2 = 1)$, $(X_2 = 2)$ et $(X_2 = 3)$.
3. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage ?
4. Dans cette question uniquement, on suppose qu'une boule blanche a été tirée au deuxième tirage. Quelle est la probabilité que l'urne contienne exactement deux boules blanches avant le second tirage ?
5. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner $X_k(\Omega)$.
6. Déterminer la probabilité des événements $(X_k = 1)$ et $(X_k = k+1)$. On commencera bien sûr par écrire ces événements à l'aide des événements B_i et $\overline{B_i}$, et on vérifiera la cohérence avec les résultats des questions précédentes.
7. On considère $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1; k+2]\!]$.
   (a) Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{(X_k=i-1)}(X_{k+1} = i)$ et $\mathbb{P}_{(X_k=i)}(X_{k+1} = i)$.
   (b) Soit $j \in [\![1; k+1]\!]$ tel que $j < i - 1$ ou $j > i$: que vaut $\mathbb{P}_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$?
   (c) En déduire que
   $$\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i) + \frac{k+3-i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i-1).$$
8. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}(X_k = 2)$.
   (a) En utilisant les questions (4) et (6c), exprimer a_{k+1} en fonction de k et de a_k.
   (b) Montrer que la suite (b_k) définie par : $\forall k \in \mathbb{N},\ b_k = a_k + k + 2$ est une suite géométrique.
   (c) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$ la valeur de $\mathbb{P}(X_k = 2)$ en fonction de k uniquement.

Problème

Partie I : Étude de la fonction réciproque de la fonction th.

On notera respectivement ch, sh et th les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Justifier que th est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer sa dérivée à l'aide de ch. Étudier sa parité.
2. Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser. On ne demande pas ici de déterminer sa bijection réciproque.
   On note Argth (appelée "argument tangente hyperbolique") sa bijection réciproque.
3. Exprimer la dérivée de th en fonction de th.
4. Montrer que Argth est impaire.
5. Démontrer que Argth est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et que : $\forall x \in I,\ \mathrm{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
6. En déduire une expression de Argth à l'aide de fonctions usuelles.
7. En déduire le développement limité à l'ordre 5 de Argth en 0.

Partie II : Manipulations algébriques autour de th

8. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $E_y : (1-y)z^2 - (1+y) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
9. En déduire que E_y possède une solution strictement positive si, et seulement si, $|y| < 1$, et qu'alors une telle solution est unique. On donnera explicitement cette solution.
10. En déduire, suivant la valeur de $y \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation $\operatorname{th}(x) = y$, et retrouver l'expression de Argth à l'aide des fonctions usuelles de la question 6.

Partie III : Étude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle $(E) : x\,y' + 3\,y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

11. Résoudre (E) sur l'intervalle $J =]0,1[$.
12. Existe-t-il des solutions de (E) sur l'intervalle $[0;1[$?
    Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 7.

Partie IV : Étude d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on souhaite déterminer toutes les fonctions f qui sont <u>définies sur $\mathbb{R}$</u>, <u>à valeurs réelles</u> et <u>dérivables en 0</u> qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}.$$

13. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
14. Déterminer toutes les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
15. Montrer que, si f est solution, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
    Indication : on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
16. Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.
17. Montrer que si f est solution et $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(\lambda x)$ est aussi solution.
18. Montrer que th est solution du problème posé.
19. Dans cette question f est une solution et x_0 est un réel fixé.
    On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.
    (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
    (b) Exprimer u_n en fonction de u_{n+1}. En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant.
    (c) Étudier la monotonie de la suite (u_n) suivant le signe de u_0.
20. Dans cette question , on suppose par l'absurde que **f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante.**
    (a) Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq 1$.
    (b) En considérant la suite (u_n) définie à la question **19.** avec cette valeur de x_0, aboutir à une contradiction.
21. Que peut-on dire si l'hypothèse "$f(0) = 1$" est remplacée par l'hypothèse "$f(0) = -1$" ?
22. Dans cette question, on suppose que **f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$.**

(a) En raisonnant par l'absurde et en choisissant astucieusement une valeur de x_0 dans la question **19.**, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 1.$$

(b) À l'aide d'un résultat précédent, en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq -1.$$

On définit alors la fonction g par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{1}{x} \operatorname{Argth}(f(x)).$$

(c) Montrer que g est bien définie et que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(2x) = g(x)$.

(d) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On notera encore g la fonction ainsi prolongée. Exprimer $g(0)$ à l'aide de $f'(0)$.

(e) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

(f) En déduire que g est constante.

23. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.