

## DS n°9

## I Exercices

## Exercice 1 [Développements limités et analyse asymptotique]

1. On a directement les formules du cours :

$$\begin{aligned} \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}), \quad \text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + o(x^{2n+1}) \\ \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \end{aligned}$$

ce qui donne pour  $n = 3$  les formules :

$$\begin{aligned} \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6), \quad \text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7) \\ \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

2. On a directement l'équivalent  $\sin(x)\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$  et ainsi sans aucun calcul  $\sin(x)\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2)$  puis par parité :

$$\sin(x)\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^3).$$

Ou on peut utiliser les dls de sin et tan à l'ordre 2, ce qui donne le même résultat.

3. Comme à la question précédente, on peut déjà constater que la fonction considérée est paire, et donc il suffit de raisonner à l'ordre 4 pour avoir le développement limité à l'ordre 5. On a directement :

$$\begin{aligned} \ln(1 + \cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) &= \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^5)\right) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^5)\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^5)\right)^2 \\ &+ \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^5)\right)^3 + o\left(\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^5)\right)^3\right) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{32} + o(x^5) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^5) \end{aligned}$$

4. (a) La fonction  $\ln$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc sur  $]0; 2[$ . La fonction  $x \mapsto 2 - x$  est polynomiale, donc  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; 2[$ , et ne s'y annule pas. Par quotient, la fonction  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{2-x}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; 2[$ .

La fonction  $\text{id}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $]0; 2[$ .

Par différence,  $f$  est donc  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; 2[$ .

Par formule de Taylor–Young, elle admet donc des développements limités à tout ordre et en tout point de  $]0; 2[$ .

(b) On a directement pour  $x \in ]0; 2[$ , en posant  $x = 1 + h$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1+h) = \frac{\ln(1+h)}{1-h} - 1 - h \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left( h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + o(h^4) \right) (1+h+h^2+h^3+h^4+o(h^4)) - 1 - h \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} -1 + \frac{h^2}{2} + \frac{5h^3}{6} + \frac{7h^4}{12} o(h^4) \\ &\underset{x \rightarrow 1}{=} -1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{5(x-1)^3}{6} + \frac{7(x-1)^4}{12} o((x-1)^4) \end{aligned}$$

(c) On a vu que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  en 1, ce qui assure déjà que les dérivées successives en 1 à calculer sont bien définies.

Par formule de Taylor–Young, on a également :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{24}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$$

et par unicité d'un développement limité on déduit :

$$f(1) = -1, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = 1, \quad f^{(3)}(1) = 5 \text{ et } f^{(4)}(1) = 14.$$

(d) On déduit aussi que  $f$  possède un point critique en 1, et que ce point critique est un minimum local : on a en effet  $f(x) - f(1) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{(x-1)^2}{2}$  qui est positif au voisinage de 1.

Ce n'est pas un extremum global, comme par opérations sur les limites on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

ce qui assure que la fonction  $f$  n'est pas minorée sur  $]0; 2[$ , et n'a donc pas de minimum global.

**Remarque :** on a également :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ . La fonction  $f$  n'est donc pas non plus majorée, et n'admet pas de minimum global.

5. (a) La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , en tant que composée de  $x \mapsto (x^2 - 2)(x + 3)$  qui est définie sur  $\mathbb{R}$  (en tant que polynôme) et de  $x \mapsto \sqrt[3]{x}$  qui est également définie sur  $\mathbb{R}$ .

(b) On utilise directement le développement limité de  $(1+x)^\alpha$  en 0, pour  $\alpha = 1/3$ , ce qui donne :

$$\sqrt[3]{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2).$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} g(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \sqrt[3]{\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right) - \frac{1}{9} \left( \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right)^2 + o \left( \left( \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right)^2 \right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{3x^2} + o \left( \frac{1}{x^2} \right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + 1 - \frac{5}{3x} + o \left( \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

(d) On déduit ainsi que :

$$g(x) - (x + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{5}{3x}$$

qui tend donc vers 0 par valeurs négatives : la droite d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe de  $g$  en  $+\infty$ , et la courbe de  $g$  est en dessous de son asymptote en  $+\infty$ .

(e) En  $-\infty$ , on retrouve exactement les mêmes calculs, et ainsi :

$$g(x) - (x + 1) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -\frac{5}{3x}$$

qui tend vers 0, mais pas valeurs positives cette fois-ci. Et ainsi la droite d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe de  $g$  en  $-\infty$ , et la courbe de  $g$  est au dessus de son asymptote en  $-\infty$ .

**Exercice 2** 1. On reconnaît l'application linéaire canoniquement associée à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ce qui prouve que  $f$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

2. On résout le système associé. On a pour  $x, y, z \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

ce qui donne directement :  $\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ . Et la famille constituée du seul vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

est bien une base du noyau, comme elle est génératrice (par construction) et libre (un seul vecteur **non nul**).

3. On résout le système associé :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ 2x - 2y + z = b \\ x - y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ z = b - 2a \\ z = c - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ z = b - 2a \\ 0 = a - b + c \end{cases}$$

Et on retrouve un système échelonné, qui a une solution si, et seulement si, la dernière équation du système est satisfaite, c'est-à-dire  $b = a + c$  (on aurait aussi pu finir de résoudre le système, mais ce n'est pas demandé).

4. Le système précédent possède une solution si, et seulement si,  $(a, b, c) \in \text{Im } f$  (par définition de l'image).

On déduit donc que :

$$\text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid b = a + c \right\}$$

qui est bien un plan de  $\mathbb{R}^3$  (c'est le plan d'équation  $a - b + c = 0$ ) et c'est d'ailleurs un hyperplan en tant que noyau de la forme linéaire non nulle  $(a, b, c) \mapsto a - b + c$ .

Pour une base, on résout le système (qui n'a qu'une équation) :

$$(a, b, c) \in \text{Im } f \Leftrightarrow b = a + c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a + c \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Et ainsi  $\text{Im}f = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et la famille considérée est bien une base (génératrice par construction, et libre car constituée de **DEUX** vecteurs non colinéaires (des 0 à des places différentes)).

5. On déduit que  $f$  n'est ni injective (son noyau n'est pas réduit à  $\{0\}$ ), ni surjective (son image est un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$  et par  $\mathbb{R}^3$  entier), donc pas bijective.

6. Ces espaces ne sont pas supplémentaires, car ils ne sont pas en somme directe comme  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}f \cap \text{Im}f$  (ce vecteur apparaît dans les deux bases précédentes) donc  $\text{Ker}f \cap \text{Im}f \neq \{0\}$ .

Ils ne sont pas non plus générateur car  $\text{Ker}f \subset \text{Im}f$  et ainsi  $\text{Ker}f + \text{Im}f = \text{Im}f \neq \mathbb{R}^3$ .

Comme un hyperplan a pour supplémentaire toute droite qu'il ne contient pas, on a d'ailleurs de que  $\text{Ker}f \subset \text{Im}f$  (ce qu'on peut voir directement dans les formes explicites de ces ensembles).

7. On a directement pour  $x, y, z \in \mathbb{R}$  :

$$g(x, y, z) = f^2(x, y, z) = \begin{pmatrix} (x - y) - (2x - 2y + z) \\ 2(x - y) - 2(2x - 2y + z) + (x - y + z) \\ (x - y) - (2x - 2y + z) + (x - y + z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - z \\ -x + y - z \\ 0 \end{pmatrix} = (-x + y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8. On directement, par définition du noyau :

$$\text{Ker}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y - z = 0 \right\} = \text{Im}f$$

et de même pour l'image :

$$\text{Im}(g) = \left\{ (-x + y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Ker}f$$

Et on aurait aussi pu traiter par double inclusion, mais c'était plus long.

9. On procède par double implication :

- si  $h_1 \circ h_2 = 0$  : soit  $y \in \text{Im}(h_2)$ . Notons  $x \in \mathbb{R}^3$  tel que  $y = h_2(x)$ . Et alors :

$$h_1(y) = h_1 \circ h_2(x) = 0$$

en utilisant que  $h_1 \circ h_2 = 0$ , ce qui prouve bien que  $y \in \text{Ker}h_1$ .

Et ainsi :  $\text{Im}(h_2) \subset \text{Ker}(h_1)$ .

D'où la première implication.

- si  $\text{Im}(h_2) \subset \text{Ker}(h_1)$  : soit  $x \in \mathbb{R}^3$ . Alors  $h_2(x) \in \text{Im}(h_2)$ , donc  $h_2(x) \in \text{Ker}(h_1)$ , et ainsi :

$$h_1 \circ h_2(x) = h_1(h_2(x)) = 0$$

et ceci étant vrai pour tout  $x$  on a bien  $h_1 \circ h_2 = 0$ .

D'où la seconde implication.

D'où le résultat.

10. D'après la question 8, on a :  $\text{Im}g \subset \text{Ker}f$  (c'est même une égalité) donc  $f \circ g = 0$ , et comme  $g = f^2$ , on a ainsi  $f^3 = 0$ .

Donc  $f$  est nilpotente, et son indice de nilpotence  $p$  vérifie  $p \leq 3$ .

Mais on a également  $g \neq 0$ , donc  $f^2 \neq 0$ . Et ainsi  $p > 2$ .

Et finalement  $f$  est nilpotente d'indice 3.

### Exercice 3

1. (a) Si  $X_3 = 4$ , cela veut dire que les trois premiers numéros sortis étaient rangés de manière strictement décroissante. Le seul tirage possible pour les trois premières boules est donc : 3, 2, 1.

Et alors, comme  $N_4 \geq 1$ , on aura bien  $N_4 \geq N_3$  et donc  $X_3 = 4$ .

Et donc :  $(X_3 = 4) = (N_1 = 3, N_2 = 2, N_3 = 1)$ .

Les tirages étant indépendants, on a :

$$\mathbb{P}(X_3 = 4) = \mathbb{P}(N_1 = 3) \cdot \mathbb{P}(N_2 = 2) \cdot \mathbb{P}(N_3 = 1).$$

Mais les boules étant indiscernables, on a :

$$\mathbb{P}(N_1 = 3) = \mathbb{P}(N_2 = 2) = \mathbb{P}(N_3 = 1) = \frac{1}{3}.$$

Et finalement :  $\mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ .

- (b) On utilise la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements  $(N_i = i)_{i=1,2,3}$  :

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \mathbb{P}(N_1 = 1) \cdot \mathbb{P}_{N_1=1}(X_3 = 2) + \mathbb{P}(N_1 = 2) \cdot \mathbb{P}_{N_1=2}(X_3 = 2) + \mathbb{P}(N_1 = 3) \cdot \mathbb{P}_{N_1=3}(X_3 = 2).$$

On a comme les boules sont indiscernables :  $\mathbb{P}(N_1 = 1) = \mathbb{P}(N_1 = 2) = \mathbb{P}(N_1 = 3) = \frac{1}{3}$ .

Reste à calculer les probabilités conditionnelles. Mais on a :  $(X_3 = 2) = (N_2 \geq N_1)$  (il n'y a pas à regarder les tirages précédents comme il n'y en a pas). Et donc comme les boules sont indiscernables :

$$\mathbb{P}_{N_1=1}(X_3 = 2) = \mathbb{P}(N_2 \geq 1) = 1$$

$$\mathbb{P}_{N_1=2}(X_3 = 2) = \mathbb{P}(N_2 \geq 2) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}_{N_1=3}(X_3 = 2) = \mathbb{P}(N_2 \geq 3) = \frac{1}{3}$$

Et finalement :

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 + 2 + 1}{9} = \frac{2}{3}$$

ce qui est bien le résultat demandé.

En regardant le système complet d'événements  $(X_3 = 2), (X_3 = 3), (X_3 = 4)$ , on déduit que :

$$\mathbb{P}(X_3 = 3) = 1 - \mathbb{P}(X_3 = 2) - \mathbb{P}(X_3 = 4) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{27 - 18 - 1}{27} = \frac{8}{27}.$$

2. Les boules étant indiscernables, chaque variable aléatoire  $N_k$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .

3. C'est la même situation qu'en question 1)a). On a l'égalité des événements :

$$(X_n = n + 1) = (N_1 > N_2 > \dots > N_n)$$

mais, du fait des valeurs des  $N_k$ , on a :

$$(N_1 > N_2 > \dots > N_n) = (N_1 = n, N_2 = n - 1, \dots, N_n = 1)$$

ce qui donne une seule valeur possible pour chaque  $N_k$ .

Comme les tirages sont indépendants et les boules indiscernables, on trouve :

$$\mathbb{P}(X_n = n + 1) = \frac{1}{n^n}.$$

**Remarque :** pour  $n = 3$ , on retrouve bien le résultat de la question 1)a).

4. On a  $(X_n = 2) = (N_1 \leq N_2)$ .

Et donc :  $(N_1 = i, X_n = 2) = (N_1 = i, N_2 \geq i)$ .

Finalement :

$$\mathbb{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \mathbb{P}(N_2 \geq i) = \mathbb{P}(i \leq N_2 \leq n) = \frac{n - i + 1}{n}$$

en utilisant que  $N_2$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .

5. Par formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements  $(N_1 = i)_{1 \leq i \leq n}$ , on déduit :

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(N_1 = i) \cdot \mathbb{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{n - i + 1}{n} = \sum_{j=1}^n \frac{j}{n^2} = \frac{n(n + 1)}{2n^2}.$$

**Remarque :** là encore, on retrouve le même résultat qu'en 1) pour  $n = 3$ .

6. Soit  $k \geq 2$ . Raisonnons sur les événements contraires. On a :  $X_n \leq k$  si, et seulement si, on a trouvé un tirage avant  $k$  dont le montant était supérieur ou égal au précédent.

Et donc :

$$(X_n \leq k) = [(N_1 \leq N_2) \text{ ou } (N_2 \leq N_3) \text{ ou } \dots \text{ ou } (N_{k-1} \leq N_k)].$$

En prenant la négation, et en appliquant les lois de de Morgan, on trouve :

$$(X_n > k) = [(N_1 > N_2) \text{ et } (N_2 > N_3) \text{ et } \dots \text{ et } (N_{k-1} > N_k)] = (N_1 > N_2 > \dots > N_k)$$

qui est bien le résultat demandé.

Mais un  $k$ -uplet  $(N_1, \dots, N_k)$  avec  $N_1 > N_2 > \dots > N_k$  revient au choix de  $k$ -éléments distincts, et donc à une partie à  $k$  éléments de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . De tels objets sont au nombre de  $\binom{n}{k}$ .

Et pour chaque événement ainsi considéré, la probabilité est de  $\frac{1}{n^k}$  (car les tirages sont indépendants, et chaque événement  $(N_j = i)$  a probabilité  $\frac{1}{n}$ ).

Et finalement on trouve bien :

$$\mathbb{P}(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}.$$

7. Montrons le résultat pour  $k = 0$  et  $k = 1$  :

- pour  $k = 0$  : on a toujours  $X_n > 0$  (comme  $X_n$  est à valeurs dans  $\llbracket 2; n+1 \rrbracket$ ), donc  $\mathbb{P}(X_n > 0) = 1$ .

Et on a aussi :  $\frac{1}{n^0} \binom{n}{0} = 1 \cdot 1 = 1$ .

La formule est donc valable pour  $k = 0$ .

- pour  $k = 1$  : on a toujours  $X_n > 1$  (comme  $X_n$  est à valeurs dans  $\llbracket 2; n+1 \rrbracket$ ), donc  $\mathbb{P}(X_n > 1) = 1$ .

Et on a aussi :  $\frac{1}{n^1} \binom{n}{1} = \frac{1}{n} \cdot n = 1$ .

La formule est donc valable pour  $k = 1$ .

8. On a l'union disjointe :  $(X_n > k - 1) = (X_n = k) \cup (X_n > k)$ . Et donc :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n > k - 1) - \mathbb{P}(X_n > k).$$

9. Traitons séparément les cas  $k = n + 1$  et  $k \neq n + 1$  :

- si  $k = n + 1$  : alors on a déjà calculé que :  $\mathbb{P}(X_n = n + 1) = \frac{1}{n^n}$ .

Et on a :

$$\frac{(n+1) - 1}{n^{n+1}} \binom{n+1}{n+1} = \frac{n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^n}$$

ce qui prouve bien l'égalité pour  $k = n + 1$ .

- si  $k \neq n + 1$  : alors  $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ , et également  $(k - 1) \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . En utilisant que  $\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n > k - 1) - \mathbb{P}(X_n > k)$ , on peut remplacer les deux dernières probabilités par les expressions calculées en question 6), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = k) &= \frac{1}{n^{k-1}} \binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{n^k} \left( n \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \right) \\ &= \frac{1}{n^k} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left( \frac{n}{(n-k+1)} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n^k} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{nk - n + k - 1}{k(n-k+1)} \\ &= \frac{1}{n^k} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{(k-1)(n+1)}{k(n-k+1)} = \frac{1}{n^k} \frac{(n+1)!(k-1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule demandée.

Et dans tous les cas on a bien le résultat.

## II Problème

- (a)  $f$  est un produit de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  (polynôme, et combinaison linéaire de constante et de exp), donc l'est également.
- (b) On écrit d'abord le DL de exp à l'ordre 3 (ça suffit) :  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ , d'où on déduit celui de  $1 - e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ , et enfin par produit :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

(c) On calcule  $f'$  et  $f''$  par dérivée d'un produit et d'une combinaison linéaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - (1+x)e^x, \quad f''(x) = -(2+x)e^x$$

On en déduit que  $f''(x) \geq 0 \iff x \leq -2$ . Ainsi,  $f'$  est strictement croissante sur  $] -\infty, -2]$ , strictement décroissante sur  $[-2, +\infty[$ . Par croissances comparées,  $f'$  tend vers 1 en  $-\infty$  ; par opérations sur les limites, elle tend vers  $-\infty$  en  $+\infty$ . On en déduit le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	1	$1 + e^{-2}$	$-\infty$

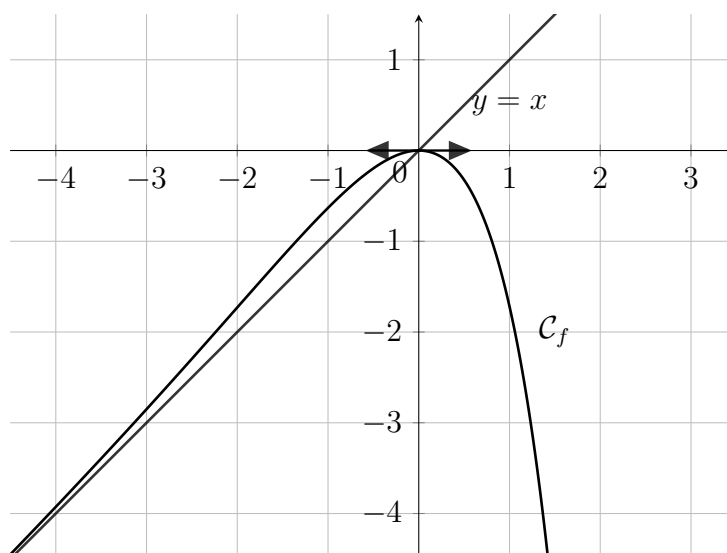
(d) Sur  $] -\infty, -2]$ ,  $f'$  est donc strictement positive ; sur  $] -2, +\infty[$ , elle est strictement décroissante et l'équation  $f'(x) = 0$  possède (par continuité et stricte monotonie) une seule solution, qui est donc 0 comme  $f'(0) = 0$ . On déduit le signe de  $f'$  puis les variations de  $f$  suivants :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Les limites en  $\pm\infty$  se calculent directement par produit (pas de FI).

(e) On a :  $f(x) - x = -xe^x \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -xe^x$  et ainsi  $f(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0^+$  par croissances comparées. Ainsi, la droite d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $-\infty$ , et la courbe de  $f$  est au-dessus de son asymptote au voisinage de  $-\infty$ .

(f) On a le graphe suivant :



2. (a) Soit  $\lambda \leq 0$ . On calcule

$$I_\lambda = \int_\lambda^0 -te^t dt$$

En effectuant une intégration par parties, licite car les fonctions  $t \mapsto t$  et  $t \mapsto e^t$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $[\lambda; 0]$ , ce qui donne :

$$I_\lambda = [-xe^x]_\lambda^0 - \int_\lambda^0 -e^t dt = \lambda e^\lambda + [e^x]_\lambda^0 = \lambda e^\lambda + 1 - e^\lambda$$

(b) Par croissances comparées et somme de limites,  $I_\lambda$  tend vers 1 en  $-\infty$ .

3. (a) La fonction  $\operatorname{ch}$  est définie et strictement positive sur  $\mathbb{R}$  (car à valeurs dans  $[1; +\infty[)$ ) donc  $g$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ . Par parité de  $\operatorname{ch}$ ,  $g$  est paire également.

(b) Les fonctions  $\operatorname{ch}$  et  $\ln$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  sur leur ensemble de définition : par composée,  $g$  est donc également  $\mathcal{C}^\infty$ . Par formule de Taylor-Young, elle admet donc des développements limités à tout ordre en tout réel, donc en 0.

On a :  $\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ , donc

$$\ln(\operatorname{ch}x) = \ln\left(1 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\right) = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4)$$

et finalement

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

Notons qu'il est heureux de n'obtenir que des puissances paires de  $x$  dans ce développement limité, et que par ailleurs on pourrait dire que le terme de reste est même un  $o(x^5)$  par parité.

(c) La fonction  $g$  est dérivable (et même  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur  $\mathbb{R}$  comme composée bien définie de telles fonctions. Par ailleurs :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

D'où le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		$\begin{array}{c} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{array}$	
$g(x)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

On aurait pu aussi directement utiliser les variations d'une composée : par stricte croissance de  $\ln$ , les variations de  $g$  sont celles de  $\operatorname{ch}$ .

(d) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x}{2}(1 + e^{-2x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$ , si bien que :

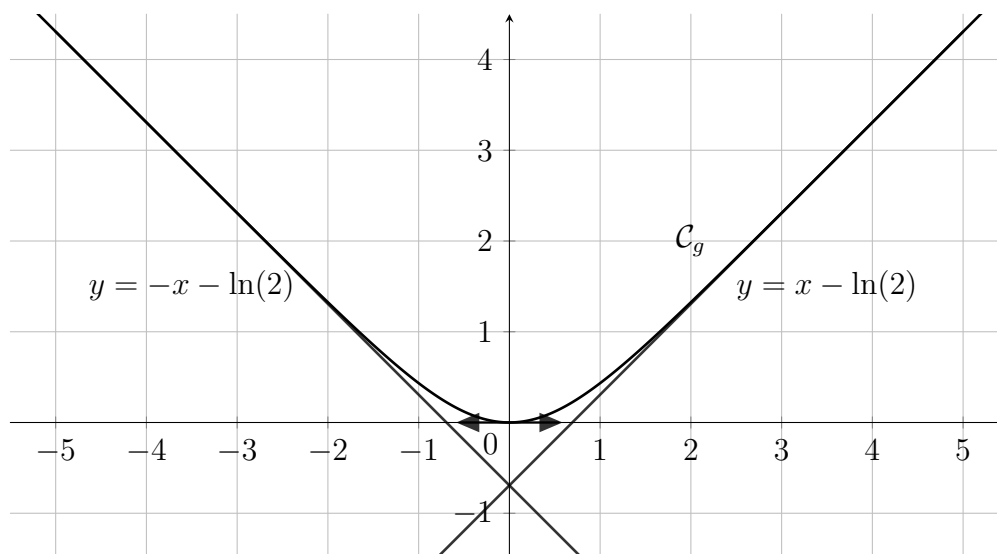
$$g(x) = \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) + \ln(1 + e^{-2x}) = x - \ln(2) + \ln(1 + e^{-2x}) + x - \ln(2) + e^{-2x} + o(e^{-2x})$$

en utilisant le développement limité à l'ordre 1 de  $x \mapsto \ln(1 + x)$  en 0.

Ceci prouve que  $g$  admet comme asymptote la droite d'équation  $y = x - \ln(2)$  en  $+\infty$ , et que la courbe de  $g$  est au-dessus de cette asymptote au voisinage de  $+\infty$ .

(e) Par parité, on a immédiatement que la droite d'équation  $y = -x - \ln(2)$  est asymptote de  $g$  au voisinage de  $-\infty$ , et  $g$  est là-encore au-dessus de son asymptote.

(f) On a le graphe suivant :



4. (a) Le cours nous apprend (si !) que :  $\forall u > -1, \ln(1 + u) \leq u$ . En appliquant ce résultat à  $e^{-2x} > -1$ , on obtient directement le résultat voulu. (On pouvait aussi redémontrer le résultat, ou utiliser la concavité de  $\ln$ ...)

(b) On a d'abord

$$J_\mu = \int_{\ln(2)}^{\mu} \ln(1 + e^{-2x}) dx$$

Grâce à la question précédente, on peut affirmer que

$$0 \leq J_\mu \leq \int_{\ln(2)}^{\mu} e^{-2x} dx = \frac{e^{-2\ln(2)} - e^{-2\mu}}{2}$$

et ce majorant a une limite finie quand  $\mu \rightarrow +\infty$ . Ainsi,  $\mu \mapsto J_\mu$  est majorée. Par ailleurs, cette fonction est croissante, car l'intégrande est positive. Le théorème de la limite monotone assure donc l'existence de la limite de  $J_\mu$  lorsque  $\mu \rightarrow +\infty$ . (Remarque : vu comme est formulée la question, c'est qu'il faut utiliser un théorème d'existence de limites qui ne donne pas la valeur de cette limite, et on n'en connaît pas beaucoup...)

5. L'étude des variations de  $f$  assure qu'elle est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Étant continue, c'est bien une bijection de  $[0, +\infty[$  sur l'intervalle  $I = ]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0)] = ]-\infty, 0]$  par théorème de la bijection monotone.

6. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et sa dérivée  $f'$  ne s'annule qu'en 0 sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi,  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f(]0, +\infty[) = ]-\infty, 0[$ .

7. On peut répondre sans dériver à la question :  $f^{-1}$  est strictement décroissante sur  $I$  (comme réciproque d'une telle fonction), à valeurs dans  $[0, +\infty[$ , et  $g$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ . Comme composée d'une fonction strictement décroissante par une fonction strictement croissante,  $h$  est strictement décroissante sur  $I$ . Par ailleurs,  $h(0) = g(f^{-1}(0)) = g(0) = 0$ . Et par composition de limites,  $h$  tend vers  $-\infty$  en  $+\infty$ .

8. On a déjà calculé les DL de  $g$  et  $f$  en 0. Il suffit d'en effectuer une combinaison linéaire pour constater que

$$g(t) + \frac{f(t)}{2} = -\frac{t^3}{4} + o(t^3) = o(f(t))$$

puisque  $f(t) \sim -t^2$  en 0.

9. Question pas facile ! L'idée est d'utiliser la question précédente. Puisque  $f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , on peut poser  $t = f^{-1}(x)$  dans l'égalité précédente et on trouve

$$g(f^{-1}(x)) + \frac{f(f^{-1}(x))}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(f(f^{-1}(x)))$$

c'est-à-dire :

$$h(x) = -\frac{x}{2} + o(x)$$

Ce qui répond à la question.

10. Par conséquent, oui (elle admet un  $DL_1(0)$ ).

11. (a)
  - Sur chacun des deux intervalles  $I_1$  et  $I_2$ , l'équation homogène s'écrit  $y' - \frac{1}{x}y = 0$  dont les solutions sont les fonctions linéaires  $x \mapsto Cx, C \in \mathbb{R}$ .
  - Pour déterminer une solution particulière, on peut par exemple utiliser la méthode de la variation de la constante en posant  $y(x) = C(x)x$  pour  $C$  dérivable. On trouve que  $y$  est solution si  $C'(x) = -e^x$ , on choisit donc  $C(x) = -e^x$  et une solution particulière est  $x \mapsto -xe^x$ .
  - Par théorème de structure, les solutions de l'équation sur  $I_1$  ou sur  $I_2$  sont les fonctions  $y_C : x \mapsto Cx - xe^x, C \in \mathbb{R}$ .

- (b) C'est un recollement : si  $y$  est solution sur  $\mathbb{R}$ , elle l'est sur  $I_1$  et sur  $I_2$ , et par conséquent il existe deux constantes  $C_1, C_2$  telles que  $y = y_{C_1}$  sur  $I_1$  et  $y = y_{C_2}$  sur  $I_2$  ; et par ailleurs, en évaluant l'équation en 0, on trouve  $y(0) = 0$ . On constate que la limite à gauche et à droite de  $y$  en 0 vaut 0, donc  $y$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour déterminer si elle est dérivable, on peut par exemple utiliser le théorème de la limite de la dérivée :

$$\forall x \in I_1, \quad y'(x) = C_1 - (1+x)e^x$$

qui tend vers  $C_1$  en  $0^-$ . De même,  $y'$  tend vers  $C_2$  en  $0^+$ . Par conséquent, la limite de  $y'$  en 0 existe si et seulement si  $C_1 = C_2$ , et donc (par théorème de la limite de la dérivée)  $y$  est dérivable en 0 si et seulement si  $C_1 = C_2$ . Par conséquent, les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation sont les fonctions  $y_C : x \mapsto Cx - xe^x$ .

- (c) Avec  $C = 1$ , on trouve bien que  $f$  est solution de l'équation sur  $\mathbb{R}$ .

12. (a) Il faut et il suffit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\Psi(x) = (1 - e^x)(1 + e^{2x})f'(x) + 2e^{3x}f(x)$$

c'est-à-dire :

$$\Psi(x) = 1 - x - e^x + e^{2x} - e^{3x} + 2xe^{3x} - xe^{4x}$$

- (b) Par techniques calculatoires plus ou moins bourrines, on trouve

$$\frac{2u^2}{(1-u)(1+u^2)} = \frac{1}{1-u} + \frac{-u-1}{1+u^2}$$

- (c)
  - L'équation homogène s'écrit sur  $I_1$  et sur  $I_2$  :

$$y' + \frac{2e^{3x}}{(1-e^x)(1+e^{2x})}y = 0$$

Il s'agit donc de trouver une primitive du terme devant  $y$ . Mais avec le changement de variable  $u = e^x$ , donc  $du = e^x dx$  :

$$\int \frac{2e^{2x}}{(1 - e^x)(1 + e^{2x})} e^x dx = \int \frac{2u^2}{(1 - u)(1 + u^2)} du$$

si bien qu'une primitive de la première fonction est (après calculs en utilisant la décomposition en éléments simples plus haut...) :

$$x \mapsto -\ln\left(|1 - e^x|\sqrt{1 + e^{2x}}\right) - \arctan(e^x)$$

et donc les solutions de l'équation homogène sont

$$x \mapsto C(1 - e^x)\sqrt{1 + e^{2x}}e^{\arctan(e^x)}, C \in \mathbb{R}$$

- Par construction de  $\Psi$ , une solution particulière de l'équation est  $f$ .
- Par théorème de structure, les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto C(1 - e^x)\sqrt{1 + e^{2x}}e^{\arctan(e^x)} + f(x), C \in \mathbb{R}$$

- (d) On recolle comme à l'équation d'avant. En notant  $C_1$  et  $C_2$  les constantes sur  $I_1$  et  $I_2$ , on trouve de même qu'il n'y a aucune condition pour la continuité, mais pour la dérivée, on trouve, pour  $x \in I_1$  :

$$y'(x) = C_1 \left( e^{-x}\sqrt{1 + e^{2x}} + (1 - e^x)\frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}} + (1 - e^x)\sqrt{1 + e^{2x}}\frac{e^x}{1 + e^{2x}} \right) e^{\arctan(e^x)} + f'(x)$$

qui tend vers  $-C_1\sqrt{2}$  quand  $x \rightarrow 0^-$ . De même à droite, et on trouve que la fonction est dérivable en 0 si et seulement si  $C_1 = C_2$ .