

DS n°9

I Exercices

Exercice 1 [Développements limités et analyse asymptotique]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner sous forme de somme les développements limités en 0 de $\cos(x)$ à l'ordre $2n$, $\operatorname{Arctan}(x)$ à l'ordre $2n + 1$ et $\ln(1 + x)$ à l'ordre n . Donner en extension les développements limités précédents pour la valeur $n = 3$.
2. Donner le développement limité de $\sin(x)\tan(x)$ en 0 à l'ordre 3.
3. Donner le développement limité de $\ln(1 + \cos(x))$ en 0 à l'ordre 5.
4. On souhaite étudier au voisinage de 1 la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{2 - x} - x$:
 - (a) Montrer que f est définie sur $]0; 2[$, et admet des développements limités à tout ordre en tout point de $]0; 2[$.
 - (b) Calculer le développement limité de f à l'ordre 4 en 1.
 - (c) En déduire les valeurs de $f^{(k)}(1)$ pour $k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$, après en avoir justifié l'existence.
 - (d) En déduire également que la fonction f possède un extremum local en 1, et préciser la nature de cet extremum. S'agit-il d'un extremum global ?
5. On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)}$.
 - (a) Donner l'ensemble de définition de g .
 - (b) Rappelez le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt[3]{1 + x}$.
 - (c) En déduire un développement asymptotique de $g(x)$ pour x tendant vers $+\infty$ à un $o\left(\frac{1}{x}\right)$ près.
 - (d) En déduire que la courbe de g possède une asymptote en $+\infty$, dont on donnera l'équation, et la position relative par rapport à la courbe de g .
 - (e) Étudier les asymptotes éventuelles à la courbe de g en $-\infty$.

Exercice 2 [Algèbre linéaire]

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x - 2y + z \\ x - y + z \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer le noyau de f et en donner une base.
3. Montrer que, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, l'équation $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ possède une solution si, et seulement si, $b = a + c$.

4. En déduire que $\text{Im}f$ est un plan de \mathbb{R}^3 , dont on donnera une équation ainsi qu'une base.
5. Justifier si f est injective, surjective ou bijective.
6. Les espaces $\text{Ker}f$ et $\text{Im}f$ sont-ils supplémentaires ?
Pour la suite de l'exercice, on pose $g = f \circ f$.
7. Justifier que g est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 , et calculer $g(x, y, z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$.
8. Montrer que $\text{Im}g = \text{Ker}f$ et que $\text{Ker}g = \text{Im}f$.
9. Pour $h_1, h_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, montrer que : $h_1 \circ h_2 = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(h_2) \subset \text{Ker}(h_1)$.
10. En déduire que f est nilpotent, et donner son indice de nilpotence (c'est-à-dire le plus petit entier naturel p tel que $f^p = 0$) sans effectuer de calculs supplémentaires.

Exercice 3

On se donne n un entier avec $n \geq 2$, et on considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n . On y tire avec remise et indépendamment $(n + 1)$ boules. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

La variable aléatoire X_n prend donc ses valeurs dans $\llbracket 2; n + 1 \rrbracket$. Par exemple, pour $n = 5$, si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 1, 3, alors $X_5 = 4$.

De plus, pour tout $k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k -ème tirage. Dans l'exemple précédent, on a donc : $N_1 = 5, N_2 = 3, \dots, N_6 = 3$.

1. Pour cette question **uniquement** on suppose que $n = 3$. L'urne contient donc des boules numérotées 1, 2, 3.
 - (a) Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ uniquement à l'aide d'événements faisant intervenir les variables aléatoires N_1, N_2, N_3 . En déduire $\mathbb{P}(X_3 = 4)$.
 - (b) Montrer que $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}(X_3 = 3)$.

Pour toute la suite, on fixe n entier avec $n \geq 2$.

2. Pour tout $k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, reconnaître la loi de N_k .
3. Exprimer simplement l'événement $(X_n = n + 1)$ et en déduire $\mathbb{P}(X_n = n + 1)$.
4. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$: $\mathbb{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n - i + 1}{n}$.
5. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
6. Pour $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, justifier l'égalité des événements : $(X_n > k)$ et $(N_1 > N_2 > \dots > N_k)$, et en déduire que : $\mathbb{P}(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$.
7. Montrer que l'égalité précédente reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
8. Pour $k \in \llbracket 2; n + 1 \rrbracket$, exprimer $\mathbb{P}(X_n = k)$ à l'aide de $\mathbb{P}(X_n > k - 1)$ et de $\mathbb{P}(X_n > k)$.
9. En déduire que : $\forall k \in \llbracket 2; n + 1 \rrbracket, \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k - 1}{n^k} \binom{n + 1}{k}$.

II Problème

L'objectif est de réaliser des études asymptotiques de différentes fonctions construites à l'aide des fonctions usuelles. Certaines questions, plus difficiles, sont marquées d'une *. Il est conseillé de bien lire les questions, et d'y répondre dans l'ordre.

Partie 1 :

1. On considère la fonction f suivante:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x(1 - e^x). \end{aligned}$$

- Justifier rapidement que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
 - Déterminer le développement limité de f à l'ordre 4 au voisinage de 0.
 - Étudier les variations de f' .
 - Calculer $f'(0)$, et en déduire les variations de f en précisant bien les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f .
 - Donner un équivalent de $(f(x) - x)$ en $-\infty$. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote en $-\infty$, dont on donnera l'équation, ainsi que la position relative par rapport à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.
 - Tracer la courbe représentative de f .
2. (a) Soit $\lambda \leq 0$, calculer:

$$I_\lambda = \int_\lambda^0 (f(t) - t) dt.$$

- (b) Étudier la limite en $-\infty$ de $\lambda \mapsto I_\lambda$.
3. On considère la fonction g suivante:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(\operatorname{ch} x). \end{aligned}$$

- Justifier que g est bien définie sur \mathbb{R} et étudier sa parité.
 - Justifier que g possède des développements limités en 0 à tout ordre, et déterminer le développement limité de g à l'ordre 4 au voisinage de 0.
 - Étudier les variations de g .
 - Calculer le développement asymptotique de g à un $o(e^{-2x})$ près en $+\infty$. En déduire que g admet une asymptote au voisinage de $+\infty$, dont on déterminera l'équation et la position relative par rapport à la courbe représentative de g au voisinage de $+\infty$.
Indication : on pourra commencer par faire apparaître un équivalent de $\operatorname{ch}(x)$ en $+\infty$.
 - Montrer que g admet une asymptote au voisinage de $-\infty$, déterminer l'équation de cette asymptote et la position relative de la courbe représentative de g par rapport à son asymptote au voisinage de $-\infty$.
 - Tracer la courbe représentative de g .
4. * Soit $\mu \geq \ln 2$, on pose:

$$J_\mu = \int_{\ln 2}^\mu (g(t) - t + \ln(2)) dt.$$

- (a) Soit ϕ la fonction définie pour $x \geq 0$ par: $\phi(x) = \ln(1 + e^{-2x}) - e^{-2x}$. Déterminer le signe de $\phi(x)$ pour $x \geq 0$.

- (b) La fonction $\mu \mapsto J_\mu$ admet-elle une limite finie quand μ tend vers $+\infty$? (On demande uniquement l'étude de l'existence de cette limite).

Partie 2 :

5. Montrer que f est bijective de $[0, +\infty[$ vers un intervalle I que l'on précisera.
On notera f^{-1} la bijection réciproque de $f : [0, +\infty[\rightarrow I$.
6. Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} .
7. On considère la fonction h définie sur I par:

$$h = g \circ f^{-1}.$$

Etudier les variations de h et préciser ses limites et/ou valeurs aux bornes de son domaine de définition.

8. Montrer que:

$$g(t) + \frac{f(t)}{2} \underset{t \rightarrow 0}{=} o(f(t)).$$

9. * Montrer que h admet un développement limité d'ordre 1 en 0 que l'on précisera.
10. * h est-elle dérivable en 0?

Partie 3:

11. Soit (E_1) l'équation différentielle:

$$xy' - y = -x^2 e^x.$$

- (a) Résoudre (E_1) sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.
- (b) Résoudre (E_1) sur \mathbb{R} .
- (c) Montrer qu'une des fonctions étudiées dans la première partie est solution de (E_1) sur \mathbb{R} .
12. * Soit (E_2) l'équation différentielle:

$$(1 - e^x)(1 + e^{2x})y' + 2e^{3x}y = \psi(x).$$

- (a) Déterminer la fonction ψ définie sur \mathbb{R} , telle que la fonction f étudiée dans la première partie soit solution de (E_2) sur \mathbb{R} .
On considèrera dans la suite que ψ est cette fonction.
- (b) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que:

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{2u^2}{(1-u)(1+u^2)} = \frac{a}{1-u} + \frac{bu+c}{1+u^2}.$$

Remarque : on ne demande pas de montrer l'unicité de tels a, b, c .

- (c) Résoudre (E_2) sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.
- (d) Résoudre (E_2) sur \mathbb{R} .