

DS n°8

I Exercices

Exercice 1 1. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$:

- si $k = 1$: on veut montrer que $f \circ g = g \circ f$, qui est donné dans l'énoncé ;
- soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f \circ g^k = g^k \circ f$. Alors par associativité de la composition :

$$f \circ g^{k+1} = f \circ g^k \circ g = g^k \circ f \circ g = g^k \circ g \circ f = g^{k+1} \circ f.$$

d'où l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

2. Par l'absurde : supposons que $f - g$ n'est pas de signe constant. Alors il existe $x, y \in [0, 1]$ tels que $(f - g)(x) \leq 0 \leq (f - g)(y)$. Et par théorème de valeurs intermédiaires, la fonction $f - g$ (continue comme différence de fonctions continues) s'annule en un point x_0 de $[0, 1]$.

Un tel x_0 vérifie : $f(x_0) = g(x_0)$. D'où la contradiction.

Donc $f - g$ est de signe constant.

3. La fonction $f - g$ étant continue sur le segment $[0, 1]$, par théorème des bornes atteintes il existe $c, d \in [0, 1]$ tels que $(f - g)([0, 1]) = [(f - g)(c), (f - g)(d)]$.

Comme $f - g$ est positive et ne s'annule pas, alors $(f - g)(c) > 0$. Donc $m = (f - g)(c) > 0$ convient.

4. On procède par récurrence :

- si $k = 1$: on cherche à montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) \geq m + g(x)$$

ce qui est ce qu'on a montré à la question précédente.

- soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1], f^k(x) \geq km + g^k(x).$$

Soit $x \in [0, 1]$. En appliquant cette inégalité à $f(x) \in [0, 1]$, on trouve :

$$f^{k+1}(x) \geq km + g^k(f(x))$$

De même, en appliquant l'inégalité correspondant au cas $k = 1$ avec $g^k(x)$, on trouve :

$$f(g^k(x)) \geq m + g^{k+1}(x)$$

Et en additionnant ces inégalités on trouve que :

$$f^{k+1}(x) \geq (k + 1)m + g^{k+1}(x)$$

comme $g^k(f(x)) = f(g^k(x))$ par la question 1.

Ce qui prouve le résultat par récurrence.

5. Comme $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, on déduit que pour tout $x \in [0, 1]$ on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k(x) \geq km.$$

Mais $m > 0$, et donc la suite de terme général (km) tend vers $+\infty$: par divergence par minoration, la suite $(f^k(x))$ tend vers $+\infty$ (comme $m > 0$). Mais comme $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ donc cette suite est bornée.

D'où la contradiction.

Donc l'hypothèse de départ est fautive, et il existe bien $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 2 1. Par définition, f est une application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 . Montrons la linéarité.

Soient $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda x_1 - 3\mu x_1 + 2\lambda x_1 + 2\mu x_2 - 4\lambda z_1 - 4\mu z_2 \\ 2\lambda x_1 + 2\mu x_2 + 2\lambda z_1 + 2\mu z_2 \\ 4\lambda x_1 + 4\mu x_2 - 2\lambda y_1 - 2\mu y_2 + 5\lambda z_1 + 5\mu z_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité.

L'application f est donc une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans lui-même : c'est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

Autre méthode : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ce qui donne directement que f est une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans lui-même (donc un endomorphisme de \mathbb{R}^3) en tant que l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } f &\Leftrightarrow f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 4x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = 2y \end{cases} \end{aligned}$$

Et donc $\text{Ker } f = \{(-2y, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-2, 1, 2))$. Et on a bien une base : c'est une famille génératrice (par construction) qui est libre (famille constituée d'un seul vecteur non nul).

3. Pour l'image, on peut regarder l'image de la base canonique (qui engendre l'image) ou y aller de manière plus directe, ce qu'on fait ici. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors $(a, b, c) \in \text{Im } f$ si, et seulement si, il

existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (a, b, c)$. On résout le système associé (de paramètres a, b, c et d'inconnues x, y, z). On a :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - 4z = a \\ 2x + 2z = b \\ 4x - 2y + 5z = c \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = b/2 \\ 2y - z = a + 3b/2 \\ -2y + z = c - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = b/2 \\ 2y - z = a + 3b/2 \\ 0 = a - b/2 + c \end{cases}$$

et le dernier système possède une solution si, et seulement si, $a - b/2 + c = 0$, c'est-à-dire $2a - b + 2c = 0$.

On déduit que :

$$\begin{aligned} \text{Im}f &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - b + 2c = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 2a + 2c\} \\ &= \{(a, 2a + 2c, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne bien une base : elle est génératrice (par construction) et libre (constituée de deux vecteurs non proportionnels, comme ils n'ont pas leurs 0 au même endroit).

Avec l'image de la base canonique, on aurait trouvé :

$$\text{Im}f = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

mais la famille (e_1, e_2, e_3) obtenue est liée. On trouve par exemple : $2e_1 - e_2 - 2e_3 = 0$, donc on peut éliminer n'importe lequel des trois vecteurs en préservant le caractère générateur. Et comme les trois vecteurs sont deux-à-deux non proportionnels, la famille à deux vecteurs ainsi obtenue est libre, donc donnera une base de $\text{Im}f$.

4. L'application f n'est donc ni injective (on a $\text{Ker}f \neq \{0\}$, comme $f(-2, 1, 2) = (0, 0, 0)$) ni surjective (on a $\text{Im}f \neq \mathbb{R}^3$ comme $(1, 0, 0) \notin \text{Im}f$ puisque $2 - 0 + 0 \neq 0$).

Elle n'est donc pas bijective.

5. Calculons $f \circ f$. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= f \begin{pmatrix} -3x + 2y - 4z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(-3x + 2y - 4z) + 2(2x + 2z) - 4(4x - 2y + 5z) \\ 2(-3x + 2y - 4z) + 2(4x - 2y + 5z) \\ 4(-3x + 2y - 4z) - 2(2x + 2z) + 5(4x - 2y + 5z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3x + 2y - 4z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 5z \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc $f \circ f = f$: c'est donc un projecteur. On déduit que $\text{Ker}f \oplus \text{Im}f = \mathbb{R}^3$, et que $\text{Im}f = \text{Ker}(f - \text{id})$.

6. On a directement l'écriture pour tout $u \in \mathbb{R}^3$:

$$u = \underbrace{f(u)}_{\in \text{Im}f} + \underbrace{u - f(u)}_{\in \text{Ker}f}.$$

Et ainsi :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 2y - 4z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 5z \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 2y + 4z \\ -2x + y - 2z \\ -4x + 2y - 4z \end{pmatrix}.$$

7. On a directement $s = 2f - \text{id}$. Avec l'expression de f , on a donc :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x + 4y - 8z \\ 4x - y + 4z \\ 8x - 4y + 9z \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 On considère $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On suppose de plus que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f' > 0$ et $f'' > 0$.

1. Comme $f' > 0$, la fonction f est strictement croissante.

Elle est de classe \mathcal{C}^2 , donc continue, sur l'intervalle $[a; b]$.

Par bijection monotone, elle réalise une bijection de $[a; b]$ dans $[f(a); f(b)]$.

Comme $f(a) < 0 < f(b)$ par hypothèse, ceci assure que f possède un unique antécédent $c \in [a; b]$, et même $]a; b[$ du fait des inégalités strictes précédentes.

2. Cette tangente a pour équation :

$$y = f'(b)(x - b) + f(b).$$

Et ainsi, la valeur de x_1 est la valeur qui correspond à $y = 0$, c'est-à-dire : $x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$.

3. (a) On a directement $\frac{f(b)}{f'(b)} > 0$ par propriétés de f , ce qui assure que $x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b = x_0$.

(b) La fonction f est :

- continue sur $[c; b]$ comme elle est \mathcal{C}^2 sur $[a; b]$;
- dérivable sur $]c; b[$ par le même argument ;

donc par égalité des accroissements finis, il existe $t \in]c; b[$ tel que $f'(t) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = \frac{f(b)}{b - c}$ (comme $f(c) = 0$).

(c) Comme $f'' > 0$, la fonction f' est strictement croissante.

Par l'absurde, supposons que $x_1 \leq c$. Alors :

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \leq c$$

donc $(b - c) \leq \frac{f(b)}{f'(b)}$ puis $f'(b) \leq \frac{f(b)}{b - c} = f'(t)$.

Or, on a : $t \in]c; b[$ donc $t < b$ et par stricte croissante de f' : $f'(t) < f'(b)$.

Contradiction.

Donc $x_1 > c$.

4. D'après l'énoncé, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c < x_{n+1} < x_n$$

et ainsi la suite (x_n) est une suite (strictement) croissante minorée (par c) : par limite monotone, elle converge vers un réel ℓ .

Mais, la suite (x_n) est à valeurs dans $[a; b]$ (même dans $[c; b]$) et la fonction φ est continue sur cet intervalle comme :

- id y est continue (polynôme) ;

- f et f' y sont continues, et f' ne s'y annule pas, donc par quotient $\frac{f}{f'}$ est continue ;

et par combinaison linéaire on a bien la continuité de φ .

Ainsi, par continuité de φ , le réel ℓ vérifie : $\varphi(\ell) = \ell$.

Or, pour tout $x \in [a; b]$, on a :

$$\varphi(x) = x \Leftrightarrow x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c$$

en utilisant que f' ne s'annule pas, et que c est l'unique point d'annulation de f sur $[a; b]$. Et ainsi : $\ell = c$.

5. Les fonctions f et f' sont de classe \mathcal{C}^1 (comme f est \mathcal{C}^2) et f' ne s'annulant pas, la fraction $\frac{f}{f'}$ est de classe \mathcal{C}^1 . Comme id est aussi \mathcal{C}^1 , par combinaison linéaire φ est de classe \mathcal{C}^1 .

Ainsi la fonction φ' est continue sur le segment $[c; x_0]$. Par théorème des bornes atteintes, elle y est bornée, donc majorée en valeur absolue. Ce qui assure l'existence de K .

L'inégalité à prouver se déduit par récurrence. Du fait de l'inégalité pour $n = 0$, on va prouver que $A = |x_0 - c|$ convient :

- initialisation : pour $n = 0$: on a directement $|x_0 - c| = 1 \cdot |x_0 - c| = K^0 A$ ce qui prouve le cas $n = 0$.
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|x_n - c| \leq K^n A$. Alors :
 - par inégalité des accroissements finis appliquée entre x_{n+1} et c à φ :

$$|x_{n+1} - c| = |\varphi(x_n) - \varphi(c)| \leq K|x_n - c|$$

- puis par hypothèse de récurrence :

$$|x_{n+1} - c| \leq K \cdot K^n \cdot A = K^{n+1} \cdot A.$$

ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

6. Par combinaison linéaire et quotient, on a :

$$\varphi' : x \mapsto 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f''(x)f(x)}{f'(x)^2}$$

$$\text{puis } \varphi'(c) = 1 - \frac{f'(c)^2 - 0}{f'(c)^2} = 0.$$

Par continuité de φ' , en reprenant la définition avec $\varepsilon < 1$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [c; c + \eta], |\varphi'(x)| \leq \varepsilon < 1$$

et, pour ce η , $x_0 = x + \eta$ convient.

On a, pour de tels x_0 et K : $\lim K^n A = 0$ (car $K \in [0; 1]$).

Par encadrement, on a alors : $\lim x_n = c$. Ce qui est le résultat demandé.

Exercice 4 1. Comme une composée d'endomorphismes est un endomorphisme, il suffit de prouver que r est idempotent. On a :

$$r^2 = (p \circ q)^2 = p \circ \underbrace{(q \circ p)}_{=p \circ q} \circ q = \underbrace{(p \circ p)}_{=p} \circ \underbrace{(q \circ q)}_{=q} = p \circ q = r.$$

Donc r est un endomorphisme idempotent, c'est un projecteur.

2. On procède par double inclusion :

- si $x \in \text{Im}(r)$: alors comme r est un projecteur, on a :

$$x = r(x) = p \circ q(x) = \underbrace{p(q(x))}_{\in \text{Im}p} = q \circ p(x) = \underbrace{q(p(x))}_{\in \text{Im}q} \in \text{Im}p \cap \text{Im}q.$$

- si $x \in \text{Im}p \cap \text{Im}q$: comme p et q sont des projecteurs, alors $x = p(x) = q(x)$, et donc $x = p \circ q(x) = r(x) \in \text{Im}(r)$.

ce qui prouve l'égalité par double inclusion.

3. On procède à nouveau par double inclusion :

- si $x \in \text{Ker}(r)$: alors $p \circ q(x) = 0$, donc $q(x) \in \text{Ker}(p)$, et donc :

$$x = \underbrace{q(x)}_{\in \text{Ker}p} + \underbrace{(x - q(x))}_{\in \text{Ker}q} \in \text{Ker}p + \text{Ker}q$$

- si $x \in \text{Ker}p + \text{Ker}q$: on note $x = x_p + x_q$ pour $x_p \in \text{Ker}p$ et $x_q \in \text{Ker}q$. Alors :

$$r(x) = p \circ q(x_p) + p \circ q(x_q) = q \circ p(x_p) + p \circ q(x_q) = q(0) + p(0) = 0$$

donc $x \in \text{Ker}(r)$.

ce qui donne l'égalité par double inclusion.

II Problèmes

II.1 Problème 1 : étude d'endomorphismes et de projecteurs

- (a) Par définition, on a : $(u - \text{aid}_E)(x) = 0$, ce qui donne bien $u(x) = ax$ en développant.

On a alors : $(u - \text{bid}_E)(x) = u(x) - bx = (a - b)x$. Puis $x = \frac{1}{a - b}(u - \text{bid}_E)(x) \in \text{Im}(u - \text{bid}_E)$ comme $(u - \text{bid}_E)(x) \in \text{Im}((u - \text{bid}_E))$ par définition.

- (b) Notons $y \in E$ tel que $x = (u - \text{bid}_E)(y) = u(y) - by$.

Alors : $(u - \text{aid}_E)(x) = (u - \text{aid}_E) \circ (u - \text{bid}_E)(y) = 0$ par propriété de u .

Donc $x \in \text{Ker}(u - \text{aid}_E)$.

- (c) On a donc directement l'égalité annoncée par double inclusion.

2. Les espaces $\text{Ker}(u - \text{aid}_E)$ et $\text{Ker}(u - \text{bid}_E)$ sont des sous-espaces de E . On veut donc montrer que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément $y \in \text{Ker}(u - \text{aid}_E)$ et d'un élément $z \in \text{Ker}(u - \text{bid}_E)$. On procède par analyse-synthèse :

- analyse : pour une telle écriture $x = y + z$, en appliquant $(u - \text{bid}_E)$, on a :

$$u(x) - bx = u(y) - by + \underbrace{u(z) - bz}_{=0} = (a - b)y$$

donc nécessairement $y = \frac{1}{a - b}(u(x) - bx)$.

Et en réinjectant : $z = x - y = \frac{1}{b - a}(u(x) - ax)$.

Ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence.

- synthèse : posons $y = \frac{1}{a - b}(u(x) - bx)$ et $z = \frac{1}{b - a}(u(x) - ax)$. Alors les éléments y et z sont respectivement des éléments de $\text{Im}(u - \text{bid}_E) = \text{Ker}(u - a\text{id}_E)$ et $\text{Im}(u - a\text{id}_E) = \text{Ker}(u - \text{bid}_E)$ (de par leur forme pour les images, par la question 1 pour les noyaux) et vérifient clairement $y + z = x$.

Ce qui prouve l'existence.

Et on a donc bien le résultat.

- (a) Les espaces étant supplémentaires, cette projection est bien définie. On a même par l'écriture précédente : $p = \frac{1}{a - b}(u - \text{bid}_E)$.

- (b) De même : $q = \frac{1}{b - a}(u - a\text{id}_E)$. Et on a : $p + a = \text{id}_E$.

- On a :

$$u \circ p = \frac{1}{a - b}(u^2 - bu) = \frac{1}{a - b}(au - a\text{bid}_E) = \frac{a}{a - b}(u - \text{bid}_E) = ap$$

$$u \circ q = \frac{1}{b - a}(u^2 - au) = \frac{1}{b - a}(bu - a\text{bid}_E) = \frac{b}{b - a}(u - a\text{id}_E) = aq$$

qui sont les égalités demandées.

- On procède par récurrence sur n :

- pour $n = 0$: on a directement $u^0 = \text{id}_E$ et $a^0 = b^0 = 1$ ce qui donne les égalités voulues ;
- soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $u^n \circ p = a^n p$ et $u \circ q = b^n q$. Alors :

$$u^{n+1}p = u \circ u^n \circ p \stackrel{HR}{=} u \circ a^n p = a^n u \circ p = a^n \cdot ap = a^{n+1}p$$

et on ferait de même pour l'autre égalité.

D'où l'hérédité. D'où la récurrence.

- Comme $p + q = \text{id}$, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u^n = u^n \circ (p + q) = u^n p + u^n q = a^n p + b^n q = (a^n - b^n)p + b^n \text{id}.$$

- Application** : On considère dans toute cette question:

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - 2z, y - 2z, -z) \end{array} .$$

- (a) Directement : c'est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A de l'énoncé.

(b) Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$(x, y, z) \in \text{Ker}u \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

(le système étant échelonné) donc $\text{Ker}(u) = \{0\}$.

(c) La matrice A est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients diagonaux non nuls : elle est inversible.

La famille de ses vecteurs colonne est donc une base de \mathbb{R}^3 , donc génératrice de \mathbb{R}^3 .

Or, on a directement $\text{Im}(u) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$: on reconnaît la famille des colonnes de A , qui engendre \mathbb{R}^3 , donc $\text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

(d) La question b) assure l'injectivité de u , et la c) sa surjectivité : on a donc bien la bijectivité de u .

(e) On a directement pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$u^2(x, y, z) = u(x - 2z, y - 2z, -z) = (x - 2z - 2(-z), (y - 2z) - 2(-z), -(-z)) = (x, y, z)$$

donc $u^2 = \text{id}_E$ et u est une symétrie.

Ainsi : $(u - \text{id})(u + \text{id}) = 0$ donc $(a, b) = (1, -1)$ convient.

(f) On résout les équations : pour $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- $(x, y, z) \in \text{Ker}(u - \text{id}) \Leftrightarrow (x - 2z, y - 2z, -z) = (x, y, z) \Leftrightarrow z = 0$ donc $\text{Ker}(u - \text{id}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et on a bien une base (génératrice par construction, et libre car constituée de deux vecteurs clairement non proportionnels) ;
- $(x, y, z) \in \text{Ker}(u + \text{id}) \Leftrightarrow (x - 2z, y - 2z, -z) = (-x, -y, -z) \Leftrightarrow x = y = z$ donc $\text{Ker}(u + \text{id}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et on a bien une base (génératrice par construction, et libre car constituée d'un seul vecteur non nul).

(g) On a par la question 3 : pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$p(x, y, z) = \frac{1}{2}(u(x, y, z) + (x, y, z)) = (x - z, y - z, 0) \text{ et } q(x, y, z) = \frac{-1}{2}(u(x, y, z) - (x, y, z)) = (z, z, z)$$

(dont on s'assure qu'ils sont cohérents avec les noyaux précédents).

(h) Et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}, u^n(x, y, z) = (x - (1 - (-1)^n)z, y - (1 - (-1)^n)z, (-1)^n z)$$

$$\text{ce qui donne bien } u^n = \begin{cases} \text{id}_E & \text{si } n \text{ pair} \\ u & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

II.2 Problème 2 : Noyaux et images itérés d'un endomorphisme

1. Les F_n et G_n sont respectivement l'image et le noyau de l'endomorphisme f^n : ce sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $G_n \subset G_{n+1}$ et $F_{n+1} \subset F_n$:

- soit $x \in G_n$: alors $f^n(x) = 0$ donc $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(0) = 0$ (par linéarité de f) donc $x \in G_{n+1}$ ce qui prouve la première inclusion ;
- soit $y \in F_{n+1}$: posons $x \in E$ tel que $y = f^{n+1}(x)$. Alors $y = f^n(f(x))$ donc $y \in F_n$, ce qui prouve la seconde inclusion (qui ne repose en rien sur la linéarité).

3. En tant qu'intersection d'espaces vectoriels, F est un espace vectoriel (c'est du cours).

Pour G , on le montre par caractérisation des sous-espaces vectoriels :

- $0 \in G$: car $f(0) = 0$ donc $0 \in G_1 \subset G$;
- soient $x, y \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Notons $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $x \in G_n$ et $y \in G_m$. Par la question précédente, on a : $G_n \subset G_{n+m}$ et $G_m \subset G_{n+m}$ (par croissance de la suite (G_n)). Et ainsi : $x, y \in G_{n+m}$. Comme G_{n+m} est un espace vectoriel, on a : $\lambda x + \mu y \in G_{n+m} \subset G$.

Et ainsi G est bien un sous-espace vectoriel de E .

4. Soit $y \in F$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $y \in F \subset F_n$, donc il existe $x \in E$ tel que $f^n(x) = y$, donc $f^n(f(x)) = f(y)$, et donc $f(y) \in F_n$. Comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien : $f(y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = F$. Donc F est stable par f .

Soit $x \in G$. Posons $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in G_n$, c'est-à-dire que $f^n(x) = 0$. Alors $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(0) = 0$ donc $f(x) \in G_n \subset G$. Donc G est stable par f .

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En tant que composée d'automorphismes, f^n est un automorphisme : le caractère injectif impose $G_n = \{0\}$ et le caractère surjectif $F_n = E$.

En passant à l'union et l'intersection, on a : $F = E$ et $G = \{0\}$.

6. Montrons que : pour tout $j \geq N$, on a : $F_{j+1} = F_j$. On procède par récurrence :

- initialisation : pour $j = N$, on peut montrer que $F_N = F_{N+1}$, ce qui est l'hypothèse de l'énoncé ;
- hérédité : soit $j \geq N$ tel que $F_{j+1} = F_j$. Montrons que $F_{j+1} = F_{j+2}$ par double inclusion :
 - par décroissance de la suite (F_n) , on a déjà : $F_{j+2} \subset F_{j+1}$;
 - soit $y \in F_{j+1}$: notons $x \in E$ tel que $y = f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Par hypothèse de récurrence, $F_j = F_{j+1}$. Comme $f^j(x) \in F_j$ (par définition), alors $f^j(x) \in F_{j+1}$, donc il existe $x' \in E$ tel que $f^j(x) = f^{j+1}(x')$. Pour un tel x' , on a : $y = f(f^{j+1}(x')) = f^{j+2}(x) \in F_{j+2}$. Ce qui prouve la seconde inclusion.

On a ainsi l'hérédité par double inclusion.

D'où le résultat par récurrence.

La suite (F_n) est constante à partir du rang N , ce qui est bien le résultat demandé.

7. L'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tels que $F_{k+1} = F_k$ est une partie non vide (il contient N) de \mathbb{N} : il admet donc un plus petit élément.

8. Notons déjà que, par stationnarité et décroissance de la suite (F_n) , on a : $F = F_{r(f)}$. Et même : pour tout $n \geq r(f)$, $F = F_n$.

Soit $x \in E$. Alors $y = f^{r(f)}(x) \in F = F_{2r(f)}$. Il existe donc $x' \in E$ tel que $y = f^{2r(f)}(x')$. Et ainsi : $f^{r(f)}(x - f^{r(f)}(x')) = y - y = 0$. Donc :

$$x = \underbrace{f^{r(f)}(x')}_{\in F} + \underbrace{x - f^{r(f)}(x')}_{\in G_{r(f)}}.$$

9. On démontre de même qu'à la question 6 que la suite (G_n) est stationnaire à partir du rang N , en montrant par récurrence que, pour tout $j \geq N : G_j = G_{j+1} :$

- initialisation : donnée dans l'énoncé ;
- hérédité : soit $j \geq N$ tel que $G_j = G_{j+1}$, alors :
 - par croissance de la suite (G_n) on a : $G_{j+1} \subset G_{j+2} ;$
 - soit $x \in G_{j+2} :$ alors $f^{j+2}(x) = 0 = f^{j+1}(f(x))$ donc $f(x) \in G_{j+1} = G_j$ donc $f^j(f(x)) = 0,$ et donc $f^{j+1}(x) = 0,$ c'est-à-dire $x \in G_{j+1}.$

D'où l'hérédité par double inclusion.

D'où le résultat par récurrence.

10. L'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tels que $G_{k+1} = G_k$ est une partie non vide (il contient N) de \mathbb{N} , donc admet un plus petit élément.

11. Notons déjà que, comme la suite (G_n) est stationnaire à partir du rang $s(f)$ on a : $G = G_{s(f)},$ et même pour tout $n \geq s(f), G = G_n.$

Soit $y \in F_{s(f)} \cap G.$ Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^{s(f)}(x)$ et $f^{s(f)}(y) = 0.$ Et ainsi : $f^{2s(f)}(x) = f^{s(f)}(y) = 0$ donc $x \in G_{2s(f)} = G_{s(f)}.$ Donc $f^{s(f)}(x) = 0.$ Donc $y = 0.$

On a donc l'inclusion $F_{s(f)} \cap G \subset \{0\}.$ L'autre inclusion est directement vérifiée comme on étudie une intersection d'espaces vectoriels.

Et finalement on a bien : $F_{s(f)} \cap G = \{0\}.$

12. On a déjà l'inclusion $G_n \subset G_{n+1}.$ Montrons l'autre inclusion.

Soit $x \in G_{n+1}.$ Alors $f^{n+1}(x) = 0.$ Mais $f^n(x) \in F_n = F_{n+1}$ donc il existe x' tel que $f^n(x) = f^{n+1}(x').$ Pour un tel $x',$ on a :

$$0 = f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(f^{n+1}(x')) = f^{n+2}(x')$$

et donc $x' \in G_{n+2} = G_{n+1}.$ Donc $f^{n+1}(x') = 0.$ Donc $f^n(x) = 0,$ c'est-à-dire que $x \in G_n.$ Ce qui prouve l'autre inclusion.

D'où l'égalité par double inclusion.

13. On a déjà l'inclusion $F_{n+1} \subset F_n.$ Montrons l'autre inclusion.

Soit $y \in F_n.$ Posons $x \in E$ tel que $y = f^n(x).$ Alors $f(y) = f^{n+1}(x) \in F_{n+1} = F_{n+2}$ donc il existe $x' \in E$ tel que $f(y) = f^{n+1}(x) = f^{n+2}(x').$ Pour un tel $x',$ on a donc par linéarité : $f^{n+1}(x - f(x')) = y - y = 0,$ donc $(x - f(x')) \in G_{n+1} = G_n.$ Donc $f^n(x - f(x')) = 0,$ ce qui donne par linéarité : $f^{n+1}(x') = f^n(x) = y,$ donc $y \in F_{n+1}.$

14. D'après les deux questions précédentes, on a directement $r(f) \leq s(f)$ et $s(f) \leq r(f)$ (sinon cela contredirait la minimalité de $r(f)$ et de $s(f)$), et donc $r(f) = s(f).$

15. Si on pose $n = r(f) = s(f),$ alors $F = F_n$ et $G = G_n.$ Par les questions 8 et 11 on a ainsi : $E = F_n + G_n$ et $F_n \cap G_n = 0.$ Et donc $E = F_n \oplus G_n,$ ce qui est le résultat demandé.

16. On garde la notation $n = p(f) = s(f).$ Montrons séparément injectivité et surjectivité :

- injectivité : soit $y \in \text{Ker}(f_F) :$ alors $y \in F$ (par définition) et $f(y) = 0.$ Mais $F = F_n$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f^n(x),$ et ainsi : $f(y) = f^{n+1}(x) = 0,$ donc $x \in F_{n+1} = F_n$ donc $f^n(x) = 0,$ donc $y = 0.$ Donc $\text{Ker}(f_F) = \{0\},$ et f_F est bien injective.
- surjectivité : soit $y \in F : F = F_n = F_{n+1}$ dont il existe $x \in E$ tel que $y = f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ avec $f^n(x) \in F_n = F.$ Donc il existe $x \in F$ tel que $y = f(x),$ ce qui prouve la surjectivité.

17. Comme $G = G_n$ (avec $n = r(f) = s(f)$), alors pour tout $x \in G$ on a : $f^n(x) = 0$. Et donc la restriction de f à G est bien nilpotente ($p = n$ convient).

18. On considère $E = \mathbb{R}[X]$ et on pose $f : P \mapsto P'$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $G_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc la suite (G_n) n'est pas stationnaire, et f n'est pas de caractère fini.

On pouvait aussi prendre $E = \mathbb{R}[X]$ et considérer $f : P \mapsto X \cdot P$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on trouve que $F_n = \{X^n \cdot P \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$ est l'ensemble des polynômes divisibles par X^n (ou admettant 0 comme racine de multiplicité au moins n), qui n'est pas non plus stationnaire.