

DS n°8

Le sujet est composé de quatre exercices et de deux problèmes. Les exercices et les problèmes sont tous indépendants, et se veulent de difficulté croissante (au sein de chaque exercice/problème, entre les exercices, et entre les problèmes). Chacun élève de la PCSI2, être exceptionnel rappelons-le, a la possibilité de traiter :

- les exercices souhaités parmi les quatre exercices ;
- un seul des deux problèmes (et fera figurer le numéro du problème traité au début de la première copie).

I Exercices

Exercice 1 Soient f, g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On souhaite montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que : $f(x_0) = g(x_0)$.

On notera pour la suite pour $k \in \mathbb{N}^*$: $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ et $g^k = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_{k \text{ fois}}$.

On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'un tel x_0 n'existe pas.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $f \circ g^k = g^k \circ f$.
2. Montrer que $f - g$ est de signe constant. On supposera pour la suite que $f - g$ est positive.
3. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) \geq m + g(x).$$

4. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], f^k(x) \geq km + g^k(x).$$

5. Conclure.

Exercice 2 On considère l'application f définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 2y - 4z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 5z \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer le noyau de f , et en donner une base.
3. Déterminer l'image de f , et en donner une base.
4. L'application f est-elle injective, surjective, ou bijective ?
5. Montrer que f est un projecteur. Que peut-on en déduire sur $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$?
6. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Donner les réels a, b, c, d, e, f tels que $(x, y, z) = (a, b, c) + (d, e, f)$ avec $(a, b, c) \in \text{Im } f$ et $(d, e, f) \in \text{Ker } f$.
7. On note s la symétrie par rapport à $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Ker } f$: exprimer s en fonction de f , puis donner l'expression explicite de $s(x, y, z)$ pour $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 On considère $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On suppose de plus que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f' > 0$ et $f'' > 0$.

1. Montrer qu'il existe un unique $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = 0$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de c de manière approchée en construisant une suite d'éléments de $[a; b]$ qui tend vers c . Pour cela, on considère $x_0 = b$ et on va construire récursivement la suite (x_n) .

2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse b . En déduire la valeur de l'abscisse x_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.
3. On va donner davantage de précisions sur x_1 :

(a) Justifier que $x_1 < x_0$.

(b) Montrer qu'il existe $t \in]c; b[$ tel que $\frac{f(b)}{b-c} = f'(t)$.

(c) Que penser de la monotonie de f' ? En déduire que $x_1 > c$.

Indication : on pourra procéder par l'absurde.

4. On répète ce processus et on construit ainsi récursivement la suite (x_n) avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

où $\varphi : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On pourra admettre que, à la manière de la question précédente, la suite (x_n) ainsi construite vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c < x_{n+1} < x_n.$$

Montrer que la suite (x_n) converge vers c .

Indication : on pourra commencer par prouver que φ est continue.

5. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in [c, x_0], |\varphi'(x)| \leq K$. Et en déduire que, pour un tel K , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leq K^n \cdot A$$

avec $A \in \mathbb{R}_+$ une constante que l'on donnera explicitement.

Indication : on pourra commencer par prouver que φ est de classe \mathcal{C}^1 .

6. Calculer $\varphi'(c)$. En déduire que l'on peut trouver une valeur $x_0 \in]c; b]$ tel que $K < 1$ et retrouver le résultat de la question 4 pour un tel x_0 .

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel. On considère p, q deux projecteurs de E qui commutent. On pose $r = p \circ q$.

1. Montrer que r est un projecteur de E .
2. Montrer que $\text{Im}(r) = \text{Im}p \cap \text{Im}q$.
3. Montrer que $\text{Ker}(r) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$.

II Problèmes

II.1 Problème 1 : étude d'endomorphismes et de projecteurs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On fixe pour tout le problème $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. On suppose que u vérifie :

$$(u - \text{aid}_E) \circ (u - \text{bid}_E) = u^2 - (a + b)u + (a \cdot b)\text{id}_E = 0.$$

1. On donne quelques résultats utiles pour la suite :

- Soit $x \in \text{Ker}(u - \text{aid}_E)$: justifier que $u(x) = ax$ et en déduire la valeur de $(u - \text{bid}_E)(x)$ puis que $x \in \text{Im}(u - \text{bid}_E)$.
- Soit $x \in \text{Im}(u - \text{bid}_E)$: en utilisant la propriété vérifiée par u , montrer que $x \in \text{Ker}(u - \text{aid}_E)$.
- En déduire que $\text{Ker}(u - \text{aid}_E) = \text{Im}(u - \text{bid}_E)$.

On pourra admettre pour la suite que l'on a un résultat analogue (dont la démonstration est identique) en échangeant les rôles de a et b .

2. Montrer que :

$$\text{Ker}(u - \text{aid}_E) \oplus \text{Ker}(u - \text{bid}_E) = E.$$

Indication : on pourra procéder par analyse-synthèse

3. Soit p la projection sur $\text{Ker}(u - \text{aid}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(u - \text{bid}_E)$.

- Pourquoi p est-elle bien définie ? Donner l'écriture de p en fonction de u .
- Soit q la projection sur $\text{Ker}(u - \text{bid}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(u - \text{aid}_E)$. Donner l'écriture de q en fonction de u , et la relation qui relie p et q .

4. Montrer que $u \circ p = ap$ et que $u \circ q = bq$.

5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u^n \circ p = a^n p \text{ et } u^n \circ q = b^n q.$$

6. En déduire la valeur de u^n en fonction de a, b, n et p pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. **Application** : On considère dans toute cette question :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - 2z, y - 2z, -z) \end{array} .$$

- Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
- Déterminer $\text{Ker}(u)$.

(c) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible. Que penser de la famille de ses vecteurs colonnes ? En déduire $\text{Im}(u)$.

(d) Montrer que $u \in \text{GL}(\mathbb{R}^3)$.

(e) Montrer que u est une symétrie, et en déduire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (avec $a > b$) tels que :

$$(u - \text{aid}_E) \circ (u - \text{bid}_E) = 0.$$

(f) Déterminer une base de $\text{Ker}(u - \text{aid}_E)$ et de $\text{Ker}(u - \text{bid}_E)$.

(g) Déterminer la projection p sur $\text{Ker}(u - \text{aid}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(u - \text{bid}_E)$.

(h) En déduire la valeur de u^n pour $n \in \mathbb{N}$.

II.2 Problème 2 : Noyaux et images itérés d'un endomorphisme

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel V de E est **stable** par E lorsque $f(V) \subset V$, c'est-à-dire lorsque pour tout $v \in V$, on a $f(v) \in V$. Le cas échéant, on peut considérer la restriction f_V de f à V ; il s'agit (on l'admet) d'un endomorphisme de V .

On notera, comme dans le cours, $f^0 = \text{Id}_E$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \text{Im}(f^n)$ et $G_n = \text{Ker}(f^n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et G_n sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que les suites de sous-espaces vectoriels $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante pour l'inclusion.

On pose désormais :

$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \quad \text{et} \quad G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$$

3. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
4. Montrer que F et G sont stables par f .
5. On suppose que f est un automorphisme de E . Déterminer F et G .

Dans les trois prochaines questions, on suppose que $N \in \mathbb{N}$ est un entier tel que $F_{N+1} = F_N$.

6. Montrer que : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $F_{N+p} = F_N$.
7. Justifier l'existence d'un plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $F_{k+1} = F_k$. On note désormais cet entier $r(f)$.
8. Montrer que $E = F + G_{r(f)}$.

Dans les trois prochaines questions, on suppose que $N \in \mathbb{N}$ est un entier tel que $G_{N+1} = G_N$.

9. Montrer que : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $G_{N+p} = G_N$.
10. Justifier l'existence d'un plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $G_{k+1} = G_k$. On note désormais cet entier $s(f)$.
11. Montrer que $F_{s(f)} \cap G = \{0_E\}$.
12. On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}$ est tel que $F_n = F_{n+1}$ et $G_{n+1} = G_{n+2}$. Montrer que $G_n = G_{n+1}$.
13. On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}$ est tel que $G_n = G_{n+1}$ et $F_{n+1} = F_{n+2}$. Montrer que $F_n = F_{n+1}$.

On dit que f est **de caractère fini** lorsqu'il existe un entier r et un entier s tels que $F_r = F_{r+1}$ et $G_s = G_{s+1}$. On suppose dans les quatre prochaines questions que f est de caractère fini. On peut donc considérer les entiers $r(f)$ et $s(f)$ définis aux questions 7 et 10.

14. Montrer que $r(f) = s(f)$.
15. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
16. Montrer que la restriction de f à F est un automorphisme.
17. Montrer que la restriction de f à G est **nilpotente**, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $(f_G)^p = 0$.
18. Donner un exemple d'espace vectoriel E et d'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas de caractère fini.

Indication : On pourra travailler sur $\mathbb{R}[X]$ et prendre une application linéaire non bijective bien choisie.