DS n^{o}5

I Exercices

Exercice 1 On procède par double implications :

- Supposons que $A \cup B = B \cap C$. Alors :
  - $A \subset B$: Soit $a \in A$. Alors $a \in A \cup B$. Donc $a \in B \cap C$. Donc $a \in B$. D'où l'inclusion.
  - $B \subset C$: Soit $b \in V$. Alors $b \in A \cup B$. Donc $b \in B \cap C$. Donc $b \in C$. D'où l'inclusion.

  D'où la première implication.

- Supposons que $A \subset B$ et $B \subset C$. Montrons que $A \cup B = B \cap C$ par double inclusion :
  - $A \cup B \subset B \cap C$: soit $x \in A \cup B$. Alors :
    * ou bien $x \in A$: mais $A \subset B$ donc $x \in B$. Et $B \subset C$ donc $x \in C$. Donc $x \in B \cap C$;
    * ou bien $x \in B$: mais $B \subset C$ donc $x \in C$. Donc $x \in B \cap C$.

    D'où l'inclusion.
  - $B \cap C \subset A \cup B$: soit $x \in B \cap C$. Alors $x \in B$. Donc $x \in A \cup B$. D'où l'inclusion.

  D'où l'égalité par double inclusion, et donc la réciproque.

Et on a donc bien l'équivalence.
Remarque : pour la réciproque, on peut plus simplement constater que : $A \cup B = B = B \cap C$.

Exercice 2 1. $a = 0$: $\dfrac{(1-\cos(x))(1+\sin(x))}{x^2+x^5} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2/2 \cdot 1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2} \underset{x\to 0}{\to} \dfrac{1}{2}$;

2. $a = +\infty$: $\dfrac{e^x - x^2\ln(x) + \ln(x)e^x}{x^2\ln(x) - x^3 + x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)e^x}{-x^3} \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty$ (par croissances comparées) ;

3. $a = 3$: on pose $x = 3 + h$ et alors :
$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3+h} - \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{1+h/3} - 1\right) \underset{h\to 0}{\sim} \sqrt[3]{3}\frac{h}{9} \underset{x\to 3}{\sim} \frac{\sqrt[3]{3}}{9}(x-3) \underset{x\to 3}{\to} 0$$

4. $a = 1$: $\ln(1+x) \underset{x\to 1}{\sim} \ln(2) \underset{x\to 1}{\to} \ln(2)$ (une limite finie non nulle donne directement un équivalent)

5. $a = 1$: on pose $x = 1 + h$ et alors :
$$\ln(1+x) - \ln(2) = \ln\left(\frac{2+h}{2}\right) = \ln(1+\frac{h}{2}) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h}{2} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{x-1}{2} \underset{x\to 1}{\to} 0$$

6. $a = 0$: $e^x\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{\sim} 1 \cdot (\cos(x) - 1) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{\to} 0$

7. $a = +\infty$:
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+1/x} - \sqrt{1-1/x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2x} + o(1/x) - 1 + \frac{1}{2x} + o(1/x)\right)$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} + o(1/\sqrt{x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

8. $a=+\infty$:
$$\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{(x-1)^3}=\frac{1}{x^3}\left((1+1/x)^{-3}-(1-1/x)^{-3}\right)$$
$$\underset{x\to+\infty}{=}\frac{1}{x^3}\left(1-\frac{3}{x}+\mathrm{o}(1/x)-1-\frac{3}{x}+\mathrm{o}(1/x)\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{6}{x^4}\underset{x\to+\infty}{\to}0$$

Exercice 3 1. La fonction ch est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Et on a les variations suivantes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ch'		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. On a directement grâce aux variations de ch :

(a) $\mathrm{ch}(]-1;1])=\left[1;\dfrac{e+1/e}{2}\right]$

(b) $\mathrm{ch}([-1;1[)=\left[1;\dfrac{e+1/e}{2}\right]$

(c) $\mathrm{ch}(]-\infty;1[)=[1;+\infty[$

(d) $\mathrm{ch}(\mathbb{R})=[1;+\infty[$

(e) $\mathrm{ch}^{-1}(]-1;1])=\{0\}$

(f) $\mathrm{ch}^{-1}([-1;1[)=\emptyset$

(g) $\mathrm{ch}^{-1}(]-\infty;1[)=\emptyset$

(h) $\mathrm{ch}^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

3. La fonction ch est **continue** sur l'**intervalle** $\mathbb{R}_+$ et elle y est **strictement croissante**. De plus $\mathrm{ch}(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x)=+\infty$.

Par théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1;+\infty[$.

4. On fixe $y\in\mathbb{R}$.

(a) i. On a un polynôme du second degré, de discriminant $\Delta=4y^2-4=4(y^2-1)$ et donc :
- si $|y|<1$: $\Delta<0$ et l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;
- si $y=\pm1$: $\Delta=0$ et l'équation a pour unique solution $X=y$.
- si $|y|>1$: $\Delta>0$ et l'équation a deux solutions, qui sont :

$$X_1=y+\sqrt{y^2-1}\text{ et }X_2=y-\sqrt{y^2-1}.$$

ii. Dans le polynôme $X^2-2Xy+1$, on reconnaît 1 comme le produit des racines et $2y$ comme leur somme. Ainsi, si cette équation possède des racines réelles :
- leur produit vaut 1 : elles ont donc même signe ;

- leur somme vaut $2y$: ce signe est donc celui de y.

Remarque : c'est cohérent avec les racines trouvées ci-dessus !

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation :

$$y = \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Résoudre cette équation revient à résoudre l'équation $X^2 - 2Xy + 1 = 0$, d'inconnue X, en posant $X = e^x$. On résout donc cette équation dans $\mathbb{R}_+^*$.

Or, on sait que cette équation a une solution si, et seulement si, $|y| \geqslant 1$. Et que les solutions sont du signe de y.

On a donc une solution dans $\mathbb{R}_+^*$, si, et seulement si : $|y| \geqslant 1$ et $y \geqslant 0$, c'est-à-dire $y \in [1; +\infty[$ (rassurant avec les variations de ch). Et plus précisément :

- si $y < 1$: y n'a pas d'antécédent par ch ;
- si $y = 1$: son unique antécédent est $\ln(1) = 0$;
- si $y = \pm 1$: ses deux antécédents sont $\ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$.

5. Par définition, pour un tel y, $\text{Argch}(y)$ est l'unique antécédent dans $\mathbb{R}_+$ de y. Et donc avec les antécédents calculés ci-dessus :

   - pour $y = 1$: comme $0 \in \mathbb{R}_+$, on a bien $\text{Argch}(1) = 0$;
   - pour $y > 1$: comme $\sqrt{y^2 - 1} > 0$, alors $y + \sqrt{y^2 - 1} > 1$ puis $\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \in \mathbb{R}_+$, et ainsi : $\text{Argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

   Et la formule trouvée pour $y > 1$ étant aussi valable pour $y = 1$, on a finalement :

$$\text{Argch} : \left\{ \begin{array}{rcl} [1; +\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \ln(y + \sqrt{1 - y^2}) \end{array} \right. .$$

Exercice 4 1. $A \Delta E = \overline{A}$: tout élément étant dans E, être dans un seul des deux revient à ne pas être dans A

$A \Delta A = \emptyset$: on ne peut pas être dans un seul des deux ensembles comme ce sont les mêmes

$A \Delta \emptyset = A$: aucun élément n'étant dans $\emptyset$, être dans un seul des deux revient à être dans A $A \Delta \overline{A} = E$: tout élément est soit dans A, soit dans $\overline{A}$, et jamais dans les deux (on a un recouvrement disjoint)

2. On procède par double inclusion :

   - $(A \Delta B) \Delta B \subset A$: Soit $x \in (A \Delta B) \Delta B$. Alors :
     - 1er cas : $x \in (A \Delta B)$ et $x \notin B$: par définition de $A \Delta B$:

$$(x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)$$

       mais, comme $x \notin B$ par hypothèse, on a donc $x \in A$.
     - 2d cas : $x \notin (A \Delta B)$ et $x \in B$: par définition de $A \Delta B$:

$$x \notin (A \cup B) \text{ ou } x \in A \cap B$$

       mais par hypothèse $x \in B$. Donc $x \in A \cup B$. Et donc $x \in A \cap B$. Donc $x \in A$.

     Et donc dans tous les cas $x \in A$. D'où l'inclusion.

- $A \subset (A\Delta B)\,\Delta B$: Soit $x \in A$. Alors :
  - 1er cas : si $x \in B$. Alors $x \in A \cap B$ donc $x \notin A\Delta B$. Mais $x \in B$. Donc par définition $x \in (A\Delta B)\,\Delta B$ (il est bien dans un seul des deux ensembles considérés).
  - 2d cas : si $x \notin B$. Alors $x \in A$ mais $x \notin B$ donc $x \in A\Delta B$. Mais $x \notin B$ donc par définition $x \in (A\Delta B)\,\Delta B$ (il est bien dans un seul des deux ensembles considérés).

  Et donc dans tous les cas $x \in (A\Delta B)\,\Delta B$. D'où l'inclusion.

D'où l'égalité par double inclusion.

3. Calculons $\varphi_B \circ \varphi_B$.

   Notons déjà que, $\varphi_B \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(E), \mathcal{P}(E))$ donc elle est composable avec elle-même et ceci a bien un sens.

   L'application $\varphi_B \circ \varphi_B$ est définie sur $\mathcal{P}(E)$. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors :

$$\varphi_B \circ \varphi_B(A) = \varphi_B(A\Delta B) = (A\Delta B)\Delta B = A$$

   par le point précédent.

   Donc $\varphi_B \circ \varphi_B = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$.

   Donc φ_B est bijective, et de plus $\varphi_B^{-1} = \varphi_B$ (elle est involutive !).

4. Avec la première question, on déduit directement que $\varphi_\emptyset = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$ et que $\varphi_E : A \mapsto \overline{A}$.

   Donc $C = \emptyset$ et $D = E$ conviennent.

Exercice 5 1. (a) Elle est toujours vraie.

Soit $y \in f(A \cap B)$. Notons $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Mais par définition :

- $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$
- $x \in B$ donc $y = f(x) \in f(B)$

donc $y \in f(A) \cap f(B)$. D'où l'inclusion.

(b) Elle est fausse en général. Prenons $E = F = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto x^2$.

Posons $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_-$. Alors :

- $f(A) = f(B) = \mathbb{R}_+$ donc $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+$
- $A \cap B = \{0\}$ donc $f(A \cap B) = \{f(0)\} = \{0\}$

et $\mathbb{R}_+ \neq 0$ (si on n'est pas convaincu, on peut noter par exemple que $1 \in \mathbb{R}_+$ mais $1 \notin \{0\}$).

2. (a) Cette assertion est vraie.

   Soit $x \in f^{-1}(C \cap D)$. Alors $f(x) \in C \cap D$ Donc $f(x) \in C$ et $f(x) \in D$. Donc $x \in f^{-1}(C)$ et $x \in f^{-1}(D)$. Donc $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. D'où l'inclusion.

   (b) Cette assertion est vraie.

   Soit $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Alors $x \in f^{-1}(C)$ et $x \in f^{-1}(D)$. Donc $f(x) \in C$ et $f(x) \in D$. Donc $f(x) \in C \cap D$. Donc $x \in f^{-1}(C \cap D)$. D'où l'inclusion.

3. On procède par double implication :

   - supposons f injective : soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$:
     - on a déjà vu en question 1)a) que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (l'injectivité de f ne sert pas) ;

– soit $y \in f(A) \cap f(B)$:
Alors $y \in f(A)$ donc il existe $a \in A$ tel que $f(a) = y$.
De même $y \in f(B)$ donc il existe $b \in B$ tel que $f(b) = y$.
Mais f est injective et $f(a) = y = f(b)$ donc $a = b$. Donc $a = b \in A \cap B$.
Donc $y \in f(A \cap B)$.
D'où l'inclusion réciproque.

Ce qui prouve l'égalité, donc l'implication.

- supposons (i) vérifiée : montrons que f est injective.
Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Montrons que $x_1 = x_2$.
Considérons $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. Ce sont bien des parties de E. Et on a en appliquant (i) :

$$f(A \cap B) = f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(A) \cap f(B) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} \neq \emptyset$$

comme $f(x_1) = f(x_2)$. Ainsi $f(\{x_1\} \cap \{x_2\})$ est non vide, donc $\{x_1\} \cap \{x_2\}$ également. Ceci impose que $x_1 = x_2$.
D'où l'injectivité.

4. On procède par double implication :

- supposons f injective : soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Montrons que $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.
On procède par l'absurde : supposons que $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$. Notons donc $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors par définition : $y \in f(A)$, donc il existe $a \in A$ tel que $f(a) = y$; et $y \in f(B)$ donc il existe $b \in B$ tel que $f(b) = y$. Et par injectivité $a = b \in A \cap B$. Mais $A \cap B = \emptyset$ d'où la contradiction.
Ce qui prouve la première implication.
- supposons (ii) vérifiée : montrons que f est injective.
Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Montrons que $x_1 = x_2$.
Considérons $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. Ce sont bien des parties de E. En on a :

$$f(A) \cap f(B) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \{f(x_1)\} \neq \emptyset$$

donc par contraposée de (ii) : $A \cap B \neq \emptyset$. Donc $\{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \emptyset$. Donc $x_1 = x_2$.
D'où l'injectivité de f.

II Problème

1. Les calculs de W_0 et W_1 se font de manière directe (en considérant $t \mapsto t$ et sin comme primitives respectives de $t \mapsto 1$ et cos), et donnent :

$$W_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = 1.$$

Pour calculer W_2, on linéarise en reconnaissant que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$, qui se primitive en $t \mapsto \dfrac{\sin(2t) + 2t}{4}$, et donc : $W_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $t \in [0; \pi/2]$, on a : $\cos(t) \in [0; 1]$. Ainsi, pour un tel t, on a :

$$0 \leqslant \cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t).$$

Et finalement, en intégrant cette inégalité sur $[0;\pi/2]$, on a par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n.$$

Montrons que ces inégalités sont strictes :

- pour la première : la fonction $t \mapsto \cos^{n+1}(t)$ est continue, positive, et non identiquement nulle sur $[0;\pi/2]$ (elle ne s'annule qu'en $\pi/2$) : donc l'inégalité de gauche est stricte.
- pour la seconde : la fonction $t \mapsto \cos^n(t) - \cos^{n+1}(t) = \cos^n(t)(1-\cos(t))$ est continue sur $[0;\pi/2]$ et n'est pas identiquement nulle (elle ne s'annule qu'en 0 et en $\pi/2$ par produit nul) : l'inégalité de droite est donc également une inégalité stricte.

Et finalement, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < W_{n+1} < W_n$$

ce qui est le résultat demandé.

La suite (W_n) est donc (strictement) décroissante, minorée (par 0) : elle converge !

3. (a) On procède par intégration par partie, en écrivant $\cos^{n+2}(t) = \cos^{n+1}(t) \cdot \cos(t)$, dont on dérive le premier facteur et on primitive le second. L'intégration par partie est licite comme sin et $\cos^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, et on a :

$$W_{n+2} = \left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^2(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t.$$

En reconnaissant que $\sin^2(t) = 1-\cos^2(t)$, on déduit que :

$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$$

ce qui donne bien l'égalité voulue en regroupant les termes en W_{n+2}.

(b) On déduit ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\dfrac{W_{n+2}}{W_n} = \dfrac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, donc $W_{n+2} \sim W_n$.

Comme la suite (W_n) est décroissante, on a également :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$$

et par théorème d'encadrement pour les équivalents, on a bien $W_n \sim W_{n+1} \sim W_{n+2}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$$

et donc les termes consécutifs de la suite de l'énoncé sont égaux : la suite est bien constante.

Sa valeur est donnée par son premier terme, à savoir :

$$(0+1)\cdot W_1 \cdot W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

4. Comme les suites (W_n) et (W_{n+1}) sont équivalentes, on a :

$$(n+1)W_{n+1}W_n \sim nW_n^2$$

et comme cette suite est constante de valeur $\dfrac{\pi}{2} \neq 0$, elle équivalente à $\dfrac{\pi}{2}$, et donc :

$$nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$$

c'est-à-dire que : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{W_n^2}{\dfrac{\pi}{2n}} = 1$. Et par continuité de la fonction racine carrée : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{W_n}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}} = 1$,

c'est-à-dire que : $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

En particulier, on a : $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$.

5. On montre les deux résultats par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   - si $n = 0$: par le calcul initial de $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, on vérifie que les deux formules correspondent (toutes les factorielles et les puissances valent 1, reste juste le $\frac{\pi}{2}$ pour W_0).
   - soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les deux formules soient vraies au rang n. Alors la relation montrée en question 3)a) donne :

$$W_{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2(n+1)+1} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}$$

   ce qui montre bien l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence.

6. Pour tout $n \geqslant 2$ on a :

$$v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{n! e^n (n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{(n-1)! e^{n-1} n^n \sqrt{n}}\right) = \ln\left(e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1/2}\right) = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

   Pour déterminer un équivalent, on utilise la formule donnée par l'énoncé. Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, alors on déduit par composition à droite que :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

   En réinjectant cette expression dans celle de v_n, il vient :

$$v_n = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   Et donc : $v_n \sim -\dfrac{1}{12n^2}$.

7. Par multiplication d'équivalents, on déduit que :

$$n(n+1)v_n \sim -\frac{n^2}{12n^2} = -\frac{1}{12}$$

   donc la suite de terme général $n(n+1)v_n$ converge (vers $-1/12$), donc est bornée.

8. (a) On a montré que $v_n \sim -\dfrac{1}{12n^2}$, donc (v_n) est du même signe que la suite de terme général $-1/12n^2$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire négative.
   Mais on a également pour tout $n \geqslant 2$ que : $S_{n+1} - S_n = v_{n+1}$ qui est du signe de v_{n+1}.
   Et donc (S_n) est décroissante à partir d'un certain rang. En particulier, elle a une limite (finie ou non).

(b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

en reconnaissant un télescopage.

On retrouve bien que (T_n) converge, et plus précisément que $\lim T_n = \frac{1}{2}$.

(c) En tant que suite convergente, la suite (T_n) est bornée. Notons A un majorant (en valeur absolue). On a montré que la suite $(n(n+1)v_n)$ est également bornée. Si on note B un majorant (en valeur absolue), on a donc pour tout $n \geqslant 2$ par inégalité triangulaire que :

$$|S_n| = \left| \sum_{k=2}^{n} v_k \right| \leqslant \sum_{k=2}^{n} |v_k| \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{B}{k(k+1)} = BT_n \leqslant AB$$

donc la suite (S_n) est bornée (elle est majorée en valeur absolue par AB).

(d) On a vu que (S_n) a une limite. Comme elle est bornée, cette limite est nécessairement finie, c'est-à-dire qu'elle converge.

9. On a pour tout $n \geqslant 2$:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} \ln(u_k) - \ln(u_{k-1}) = \ln(u_n) - \ln(u_1) = \ln(u_n) - 1$$

en reconnaissant une somme télescopique.

Ainsi, comme (S_n) converge, alors par opération sur les limites $\ln(u_n)$ converge également. Et donc, par continuité de la fonction exponentielle, $u_n = \exp(\ln(u_n))$ converge également vers une limite ℓ.

Et nécessairement $\ell > 0$, en tant qu'image par exp de la limite (finie) de $\ln(u_n)$.

10. Comme $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$. Et donc en remplaçant u_n par son expression on a bien : $n! \sim \ell \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

11. On reprend l'expression calculée de W_{2n}, à savoir :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{\ell \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n}}{2^{2n} \ell^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \sqrt{n}^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\ell\sqrt{2n}}$$

Et comme on avait également : $W_{2n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$, on déduit finalement que : $\frac{\pi}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, c'est-à-dire : $\ell = \sqrt{2\pi}$.

Et on a bien la formule de Stirling !