DS n^{o}4

Exercice 1

1. La fonction $t \mapsto \cos^3(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on travaille sur $\mathbb{R}$. On linéarise : pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos^3(t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3it}+e^{-3it}+3e^{it}+3e^{-it}}{8} = \frac{\cos(3t)}{4} + \frac{3\cos(t)}{4}$$
et donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \cos^3(t)$ est $t \mapsto \frac{1}{12}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t)$.

   Remarque : on pouvait aussi faire par les règles de Bioche, et le changement de variable $u = \sin(t)$ donne comme primitive : $t \mapsto \sin(t) - \frac{1}{3}\sin^3(t)$.

2. $t \mapsto \sin(2t)e^{-t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc on travaille sur $\mathbb{R}$. On passe par les complexes :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin(2t)e^{-t} = \mathrm{Im}\left(e^{(-1+2i)t}\right)$$
qui se primitive en $x \mapsto \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-1+2i}e^{(-1+2i)x}\right) = \frac{e^{-t}}{5}\left(-2\cos(2x) - \sin(2x)\right)$.

3. La fonction $t \mapsto t^2e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on travaille sur $\mathbb{R}$. On va procéder à deux intégrations par parties, en dérivant le polynôme devant l'exponentielle. On a :
$$\begin{aligned} \int^x t^2e^t\mathrm{d}t &= x^2e^x - \int^x 2te^t\mathrm{d}t \\ &= x^2e^x - 2xe^x + \int^x 2e^t\mathrm{d}t \\ &= x^2e^x - 2x + 2e^x \\ &= (x^2-2x+2)e^x \end{aligned}$$
ce qui donne que $t \mapsto (t^2-2t+2)e^t$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto t^2e^t$.

4. La fonction $t \mapsto t\sin(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on travaille sur $\mathbb{R}$. On passe par les complexes, puis on fait une intégration par parties. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$t\sin(t) = \mathrm{Im}\left(te^{it}\right)$$
et comme ci-dessus :
$$\begin{aligned} \int^x te^{it}\mathrm{d}t &= -ixe^{ix} + \int^x ie^{it}\mathrm{d}t \\ &= -ixe^{ix} + e^{ix} \\ &= (1-ix)e^{ix} \end{aligned}$$
et comme :
$$\mathrm{Im}\left((1-ix)e^{ix}\right) = \sin(x) - x\cos(x)$$
on trouve finalement que $t \mapsto \sin(t) - t\cos(t)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto t\sin(t)$.

5. $t \mapsto t^2\ln(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$. On primitive en faisant une intégration par partie en dérivant le logarithme, ce qui donne comme primitive : $x \mapsto \frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9}$

6. $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc on travaille sur $\mathbb{R}$. On primitive en faisant une intégration par partie en dérivant le logarithme, ce qui donne comme primitive : $x \mapsto x\ln(1+x^2) - 2x + 2\mathrm{Arctan}(x)$

7. La fonction $t \mapsto t\text{Arctan}(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc on travaille sur $\mathbb{R}$. On procède par intégration par parties :

$$\int^x t\text{Arctan}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\int^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

où la seconde primitive se calcule par :

$$\int^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = x - \text{Arctan}(x)$$

et finalement, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto t\text{Arctan}(t)$ est $t \mapsto \text{Arctan}(t)\dfrac{t^2+1}{2} - \dfrac{t}{2}$.

8. On a au dénominateur un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. On passe par la forme canonique :

$$t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$

et donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}$ se primitive sur $\mathbb{R}$ en : $t \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. On a (1 étant racine évidente) : $t^2 + 2t - 3 = (t-1)(t+3)$.

   On écrit sous forme d'éléments simples :

$$\frac{1}{t^2+2t-3} = \frac{1/4}{t-1} + \frac{-1/4}{t+3}$$

   ce qui donne pour primitive :

$$t \mapsto \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+3}\right|.$$

   Et la primitive ci-dessus est valable sur les trois intervalles maximaux sur lesquels la fonction est définie, à savoir : $]-\infty; -3[$, $]-3; 1[$ et $]1; +\infty[$.

Exercice 2

1. $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ avec $u = \sqrt{t}$: $\int^x \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\mathrm{d}t = \int^{\sqrt{x}} \dfrac{2u}{u+u^3}\mathrm{d}u = \int^{\sqrt{x}} \dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u = 2\text{Arctan}(\sqrt{x})$.

   donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ est $t \mapsto 2\text{Arctan}(\sqrt{t})$.

2. $t \mapsto \dfrac{1}{t+t(\ln(t))^2}$ avec $u = \ln(t)$: $\int^x \dfrac{1}{t+t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t = \int^{\ln(x)} \dfrac{1}{1+u^2}\mathrm{d}t = \text{Arctan}(\ln(x))$.

   Donc une primitive est : $x \mapsto \text{Arctan}(\ln(x))$.

3. $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{e^t+1}$ avec $u = e^t$: $\int^x \dfrac{e^{2t}}{e^t+1}\mathrm{d}t = \int^{e^x} \dfrac{u}{u+1}\mathrm{d}u = \int^{e^x} \left(1 - \dfrac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u = e^x - \ln(1+e^x)$.

   Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{e^t+1}$ est $t \mapsto e^t - \ln(1+e^t)$.

4. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ avec $t=\dfrac{1}{u}$: $\int^x \dfrac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = -\int^{1/x} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{u^2}}}\mathrm{d}u = -\int^{1/x} \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = -\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

   Donc une primitive cherchée est $x \mapsto -\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

5. $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$ avec $t=u^2-1$: $\int^x \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t = \int^{\sqrt{1+x}} 2(u^2-1)\mathrm{d}u = \dfrac{2}{3}\sqrt{1+x}^3 - 2\sqrt{1+x}$.

   Donc une primitive sur $]-1;+\infty[$ de $t \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ est $t \mapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{1+t}^3 - 2\sqrt{1+t}$.

6. $t \mapsto \dfrac{1}{\cos(t)}$ avec $u=\sin(t)$: $\int^x \dfrac{1}{\cos(t)}\mathrm{d}t = \int^{\sin(x)} \dfrac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$.

   Donc une primitive cherchée est $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(t)}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$.

   Remarque : et on a le même interdit au départ ($\cos(x)=0$) et à l'arrivée ($\sin(x)=\pm 1$) qui correspondent tous les deux à $x \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Exercice 3

1. $y'+y=\cos(x)e^x$, avec $y(0)=\dfrac{187}{5}$: $S=\left\{x \mapsto \lambda e^{-x}+\dfrac{e^x}{5}(2\cos(x)+\sin(x)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto 37e^{-x}+\dfrac{e^x}{5}(2\cos(x)+\sin(x))$ (en notant que $\dfrac{187}{5}=37+\dfrac{2}{5}$).

   Remarque : pour une solution particulière, on passe par les complexes pour primitive $x \mapsto \cos(x)e^{2x}$.

2. $(x^2+1)y'-xy=(x^2+1)^{3/2}$, avec $y(1)=\sqrt{2}$: $S=\{x \mapsto \lambda\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$.

3. $x(1+\ln(x)^2)y'+2\ln(x)y=1$, avec $y(e)=37$: $S=\left\{x \mapsto \dfrac{\lambda+\ln(x)}{1+\ln(x)^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto \dfrac{73+\ln(x)}{1+\ln(x)^2}$.

4. $(1+e^x)y'+e^xy=1+xe^x$, avec $y(1)=1$: $S=\{x \mapsto \dfrac{\lambda+x+(x-1)e^x}{1+e^x}\}$. Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto x \mapsto \dfrac{e+x+(x-1)e^x}{1+e^x}$

Exercice 4

1. $y''+y'-2y=12\mathrm{sh}(x)$, $y(0)=-1$ et $y'(0)=16$

   Ensemble solution : $S=\{x \mapsto 2xe^x+3e^{-x}+\lambda e^x+\mu e^{-2x} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$

   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto 2xe^x+3e^{-x}+3e^x-7e^{-2x}$

2. $y''+4y'+5y=e^{-2x}\sin(x)$, $y(0)=1$ et $y'(0)=\dfrac{1}{2}$

   Ensemble solution : $S=\left\{x \mapsto e^{-2x}\left(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)\right)-\dfrac{e^{-2x}}{2}x\cos(x) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}$

   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto e^{-2x}\left(\cos(x)+3\sin(x)\right)-\dfrac{e^{-2x}}{2}x\cos(x)$

3. $y'' + 2y' + y = xe^x$, $y(0) = \dfrac{3}{4}$ et $y'(0) = 36$

   Ensemble solution : $S = \left\{ x \mapsto (\lambda x + \mu)\, e^{-x} + \dfrac{x-1}{4} e^x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto (37x + 1)\, e^{-x} + \dfrac{x-1}{4} e^x$

4. $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{ch}(x)$, $y(0) = 37$ et $y'(0) = 1/2$

   Ensemble solution : $S = \left\{ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^x + \dfrac{1}{2} x^2 e^x + \dfrac{1}{4} e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ (avec principe de superposition pour une solution particulière)

   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto \left(-36x + \dfrac{147}{4} \right) e^x + \dfrac{1}{2} x^2 e^x + \dfrac{1}{4} e^{-x}$