DS n^{o}4

IMPORTANT : on prêtera une attention toute particulière au sens de ce qu'on écrit. Les erreurs suivantes seront particulièrement sanctionnées, en étant comptabilisées et entraînant un malus global à la copie :

1. une primitive est une fonction : on ne doit pas écrire "$x\ln(x) - x$ est une primitive de $\ln(x)$" mais bien "$x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln" ;
2. on dérive une fonction, et pas des réels : on n'écrira pas "$f(x)$ est dérivable" mais bien "f est dérivable", et on donnera la justification (par produit, combinaison linéaire, composée, ou quotient dont le dénominateur ne s'annule pas) ;
3. une primitive n'est pas unique : on n'écrira jamais "la primitive". Ou bien on définit sa valeur y_0 en un x_0, et on dira "l'unique primitive qui vaut y_0 en x_0", ou bien on écrira plus simple "une primitive" ;
4. une solution d'une équation différentielle est une fonction : pour donner les solutions d'une équation différentielle, on écrira soit "les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \dots$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$" ou alors "l'ensemble solution de l'équation est : $S = \{x \mapsto \lambda \dots \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$"
5. si on considère une équation différentielle linéaire, on peut être amené à résoudre l'équation homogène associée : on n'écrira pas "les solutions homogènes sont…" mais bien "les solutions de l'équation homogène sont…"
6. un polynôme possède des racines tandis qu'une équation polynomiale possède des solutions : on ne parle pas de solution d'un polynôme, ni de racine d'une équation ;
7. quand on écrit une intégrale, la variable d'intégration ne doit pas apparaître dans les bornes ;
8. la conjugaison du verbe résoudre doit être maîtrisée.

I Intégrales et primitives

Exercice 1 Déterminer des primitives des fonctions suivantes, en précisant bien à chaque fois l'intervalle sur lequel cette primitive est valable :

1. $t \mapsto \cos^3(t)$
2. $t \mapsto \sin(2t)e^{-t}$
3. $t \mapsto t^2e^t$
4. $t \mapsto t\sin(t)$
5. $t \mapsto t^2\ln(t)$
6. $t \mapsto \ln(1+t^2)$
7. $t \mapsto t\mathrm{Arctan}(t)$
8. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}$
9. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2t-3}$

Exercice 2

Appliquer le changement de variable demandé, et en déduire des primitives des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ avec $u = \sqrt{t}$
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t+t(\ln(t))^2}$ avec $u = \ln(t)$

3. $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{e^t+1}$ avec $u = e^t$

4. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ avec $t = \dfrac{1}{u}$

5. $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$ avec $t = u^2 - 1$

6. $t \mapsto \dfrac{1}{\cos(t)}$ avec $u = \sin(t)$

II Équations différentielles

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes, puis résoudre le problème de Cauchy associé :

1. $y' + y = \cos(x)e^x$, avec $y(0) = \dfrac{187}{5}$.
2. $(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{3/2}$, avec $y(1) = \sqrt{2}$
3. $x(1+\ln(x)^2)y' + 2\ln(x)y = 1$, avec $y(e) = 37$ (qu'on résout sur $\mathbb{R}_+^*$).
4. $(1+e^x)y' + e^x y = 1 + xe^x$, avec $y(1) = 1$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes, puis résoudre le problème de Cauchy associé.

On n'exprimera que les solutions réelles, et on veillera à ne pas utiliser l'exponentielle complexe pour les exprimer (on utilisera les fonctions circulaires à la place).

1. $y'' + y' - 2y = 12\text{sh}(x)$, $y(0) = -1$ et $y'(0) = 16$
2. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\sin(x)$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = \dfrac{1}{2}$
3. $y'' + 2y' + y = xe^x$, $y(0) = \dfrac{3}{4}$ et $y'(0) = 36$

   Indication : on pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto f(x)e^x$ où f est une fonction affine
4. $y'' - 2y' + y = 2\text{ch}(x)$, $y(0) = 37$ et $y'(0) = \dfrac{1}{2}$