DS n^{o}3

I Exercices

Exercice 1 Proche du cours

1. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{-x}+x^2}{2x-\ln(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}+x}{2-\frac{\ln(x)}{x}}=+\infty$ par quotient (pas de FI au numérateur, et croissances comparées au dénominateur) ;

   (b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\dfrac{x}{\sin(x)}=1$ par produit (les deux quotients tendent vers 1 par taux d'accroissement) ;

   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}}{4\ln(x)-2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}}{x^2}\dfrac{x^2}{4\ln(x)-2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}}{x^2}\dfrac{x}{4\dfrac{\ln(x)}{x}-2+\frac{5}{x}}=-\infty$ par produit (les quotients tendent vers $+\pm\infty$ par croissances comparées) ;

   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(e^x)}{\ln(x-\sqrt{x})}=0$ par encadrement (le numérateur est bornée, entre -1 et 1, et le dénominateur tend vers $+\infty$).

2. On a directement avec les formules d'Euler :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \cos^3(t)\sin^2(t)=-\frac{1}{16}\cos(5t)-\frac{1}{16}\cos(3t)+\frac{1}{8}\cos(t)$$

   et donc une primitive est : $t\mapsto-\dfrac{1}{80}\sin(5t)-\dfrac{1}{48}\sin(3t)+\dfrac{1}{8}\sin(t)$.

3. On le voit comme la partie réelle de $\sum_{k=0}^n e^{ikx}$: c'est une somme géométrique, de raison $q=e^{ix}$, et on distingue suivant la valeur de x :

   - si $x\equiv0[2\pi]$: la raison est 1, et directement $S_n=n+1$;
   - sinon : la raison est différente de 1, et avec formule de l'angle moitié on trouve :

$$S_n=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

4. (a) On est ramené à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2 & = & -15\\ 2xy & = & -8\\ x^2+y^2 & = & \sqrt{15^2+8^2}=\sqrt{289}=17\end{array}\right.$$

   ce qui donne comme racines carrées : $\pm(1-4i)$

   (b) Les solutions sont les couples formant les racines du polynôme $P=X^2-(3-2i)X+(5-i)$. Le discriminant de P est : $\Delta=-15-8i$ (quelle surprise...) et donc les racines de P sont :

$$\frac{3-2i+(1-4i)}{2}=2-3i\text{ et }\frac{3-2i-(1-4i)}{2}=1+i$$

   donc les deux couples solutions sont $(2-3i,1+i)$ et $(1+i,2-3i)$.

5. La fonction arccos est définie sur $[-1;1]$ et à valeurs dans $[0;\pi]$. La fonction tan est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi \,|\, k\in\mathbb{Z}\}$ donc la seule valeur interdite sur $[0;\pi]$ est $\pi/2=\arccos(0)$.

   Et donc l'expression n'a de sens que si $x\in[-1;0[\cup]0;1]$.

   Pour un tel x, on a :
$$\tan(\arccos(x))=\frac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$
   en notant que :

   - par définition : $\cos(\arccos(x))=x$;
   - comme $\arccos(x)\in[0;\pi]$, alors $\sin(\arccos(x))\geqslant 0$ puis :
$$\sin(\arccos(x))=\sqrt{\sin^2(\arccos(x))}=\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}=\sqrt{1-x^2}.$$

   Remarque : on retrouve le même interdit qu'au départ : la formule finale n'a de sens que si $x\in[-1;0[\cup]0;1]$.

6. On a directement : $A=\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

   On cherche ensuite φ tel que :
$$\cos(\varphi)=\frac{3}{A}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{A}=\frac{1}{2}$$
   et $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ convient.

   Et ainsi : $A=2\sqrt{3}$ et $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ (par exemple, comme on peut changer φ d'un multiple entier de 2π).

7. La fonction arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Il suffit de montrer que $\varphi: x\mapsto\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est définie et dérivable sur $]-1;1[$ pour conclure.

   Comme la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, il suffit de montrer que $x\mapsto\dfrac{1+x}{1-x}$ est définie et dérivable sur $]-1;1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$:

   - elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$: si $x\in]-1;1[$: $1+x>0$ et $1-x>0$ donc le quotient est bien dans $\mathbb{R}_+^*$;
   - elle est bien définie et dérivable sur $]-1;1[$: il s'agit sur cet intervalle d'un quotient de deux fonctions dérivables (fonctions affines) dont le dénominateur ne s'annule pas.

   Et ainsi : f est bien définie et dérivable sur $]-1;1[$.

   Par dérivée d'une composée, on a pour tout $x\in]-1,1[$:
$$f'(x)=\varphi'(x)\cdot\frac{1}{1+\varphi(x)^2}=\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\frac{1}{1-x+1+x}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\arcsin'(x)$$
   et ainsi les fonctions f' et $\frac{1}{2}\arcsin'$ coïncident sur **l'intervalle** $]-1;1[$: les fonctions f et $\dfrac{1}{2}\arcsin$ diffèrent d'une constante.

Comme $f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(0)$, on a bien l'égalité demandée.

Remarque : on peut simplifier le calcul de la dérivée de $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ en notant que :

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{2-(1-x)}{1-x} = \frac{2}{1-x} - 1$$

Exercice 2 Croissance d'une fonction

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

Montrons que $f(x) < f(y)$.

Par l'absurde, supposons que $f(x) \geqslant f(y)$:

- par stricte croissance de $f \circ f \circ f$, appliquée à x et y : $f \circ f \circ f(x) < f \circ f \circ f(y)$;
- par croissance de $f \circ f$, appliquée à $f(x)$ et $f(y)$: $f \circ f(f(x)) \geqslant f \circ f(f(y))$, donc $f \circ f \circ f(x) \geqslant f \circ f \circ f(y)$;

D'où la contradiction.

Donc $f(x) < f(y)$.

Donc f est strictement croissante.

Exercice 3 Dérivées successives

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}f \text{ est } n \text{ fois dérivable avec } f^{(n)} : x \mapsto \ln(a)^n a^x\text{''}.$$

Et montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en procédant par récurrence.

- initialisation : pour $n = 0$, on veut montrer que f est 0 fois dérivable (ce qui est vrai) et que :

  $$f^{(0)} : x \mapsto \ln(a)^0 a^x = a^x$$

  ce qui est vrai de par l'expression de f.

  D'où l'initialisation.

- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$, c'est-à-dire que f est n-fois dérivable avec $f^{(n)} : x \mapsto \ln(a)^n a^x$.

  Alors par linéarité, $f^{(n)}$ est dérivable, c'est-à-dire que f est bien $(n+1)$ fois dérivable, avec :

  $$f^{(n+1)} = f^{(n)\prime} : x \mapsto \ln(a)^n \cdot \ln(a) a^x = \ln(a)^{n+1} a^x$$

  et on retrouve bien la bonne formule au rang $n+1$.

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui conclut l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

Exercice 4 Fonction additives sur les rationnels

1. Avec $x = y = 0$, on trouve :

   $$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$$

   donc $f(0) = 0$.

   Soit $x \in \mathbb{Q}$: en appliquant la propriété avec $y = -x$, on trouve :

   $$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$$

   donc $f(-x) = -f(x)$. Ce qui prouve le résultat.

2. Soit $x \in \mathbb{Q}$.

   Montrons d'abord le cas où $n \in \mathbb{N}$ en procédant par récurrence :

   - initialisation : pour $n = 0$, on a :

     $$f(0 \cdot x) = f(0) = 0 \text{ et } 0f(x) = 0$$

     ce qui prouve l'initialisation ;
   - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(nx) = nf(x)$. En appliquant la propriété satisfaite par f avec $y = nx$, on trouve ;

     $$f((n+1)x) = f(x + nx) = f(x) + f(nx) \overset{HR}{=} f(x) + nf(x) = (n+1)f(x)$$

     ce qui prouve l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence.

   Si maintenant $n \in \mathbb{Z}_-$, alors $(-n) \in \mathbb{N}$ et par le cas précédent et la question 1 :

   $$f(nx) = f((-n)(-x)) = (-n)f(-x) = (-n) \cdot (-f(x)) = nf(x)$$

   ce qui donne bien le résultat pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Notons $x = \dfrac{n}{m}$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$.

   Par la question précédente :

   $$f(n) = f(mx) = mf(x)$$

   donc en divisant par $m \neq 0$ on a : $f(x) = \dfrac{1}{m} f(n)$.

   Mais toujours par la question précédente :

   $$f(n) = f(n \cdot 1) = nf(1) = na$$

   et en réinjectant : $f(x) = \dfrac{n}{m} a = ax$.

   D'où le résultat.

Exercice 5 Système et étude de fonction

1. On pose $\varphi : x \mapsto x + a + \frac{1}{ax}$. Alors par combinaison linéaire, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{ax^2} = \frac{ax^2 - 1}{ax^2}$$

   d'où les variations suivantes :

x	0		$1/\sqrt{a}$		$+\infty$
φ'	‖	$-$	0	$+$	
φ	‖ $+\infty$	$\searrow$	$a + \frac{2}{\sqrt{a}}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. On a : $b^2+\dfrac{2}{b}-3=\dfrac{b^3-3b+2}{b}=\dfrac{(b-1)^2(b+2)}{b}\geqslant 0$ ne s'annulant qu'en $b=1$.

   Remarque : on aurait aussi pu passer par une étude de fonction.

3. Procédons par analyse-synthèse :

   - Soit (x,y,z) une solution de $(\mathcal{S})$. Alors on a : $(x,y,z)=(x,y,-x-y)$ (à cause de la première équation).

     Pour un tel triplet, on a donc $(e^x,e^y,e^z)=(e^x,e^y,\dfrac{1}{e^xe^y})=(X,a,1/aX)$ avec $X=e^x, a=e^y\in\mathbb{R}_+^*$.

     On cherche donc pour quelle valeur $\varphi(X)=3$.

     Or, du fait des variations de φ, le minimum est de $a+\dfrac{2}{\sqrt{a}}$. Par la question 2., ce minimum vaut au moins 3, donc :

     – pour que l'équation $\varphi(X)=3$ ait une solution, il faut que ce minimum vaille 3, ce qui est le cas si, et seulement si, $a=1$;

     – et alors ce minimum est atteint en $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=1$.

     Ainsi, $X=e^x=1$, donc $x=0$. Et $a=e^y=1$, donc $y=0$. Puis $z=-x-y=0$.

     Donc $(0,0,0)$ est l'unique solution possible.

   - Réciproquement : $(0,0,0)$ est solution de $(\mathcal{S})$.

   Conclusion : $(0,0,0)$ est l'unique solution de $(\mathcal{S})$.

II Problème : Fonction de Lambert

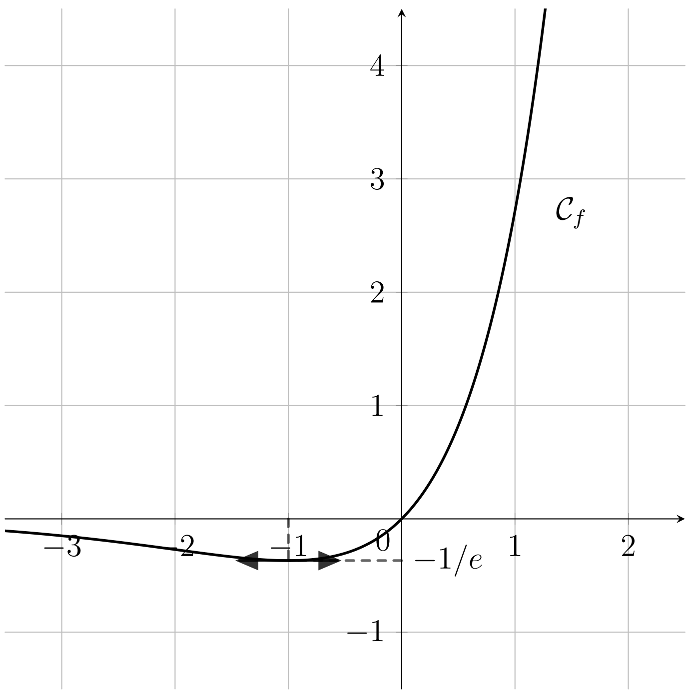
1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui y sont dérivables.

2. 0 en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$. La première est une croissance comparée, la deuxième est juste un produit de limites.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = x\,e^x + e^x = (x+1)e^x$. Donc f est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et croissante sur $[-1, +\infty[$. Par ailleurs $f(-1) = -\frac{1}{e}$ qu'on résume dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. On a le graphe suivant :



5. f est strictement croissante et continue sur $[-1, +\infty[$: elle réalise donc une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[f(-1), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[= [-\frac{1}{e}, +\infty[$.

6. Soit $X = \ln(x)$: X tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Or, $\dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(X)}{X}$, qui tend donc vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ par croissance comparée.

7. $g(1) = e$ donc $W(e) = 1$. Par ailleurs, $g(0) = 0$ donc $W(0) = 0$ et $g(-1) = -\frac{1}{e}$ donc $W(-\frac{1}{e}) = -1$.

8. Puisque g est croissante strictement sur son domaine de définition, W aussi. Par ailleurs, la limite de W en $+\infty$ est également $+\infty$.

9. W est croissante sur $[0, +\infty[$ et $W(0) = 0$, donc W est positive sur $[0, +\infty[$.

10. g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ **et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle** ; ainsi, W est dérivable sur $g(]-1,+\infty[) =]-\frac{1}{e},+\infty[$. Par ailleurs, on a : $W'(x) = \frac{1}{g' \circ g^{-1}(x)} = \frac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}}$.

    Si de plus $x \neq 0$, puisque W est la réciproque de g, $W(x)e^{W(x)} = x$, donc $\frac{1}{e^{W(x)}} = \frac{W(x)}{x}$. Donc $W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$.

11. Soit $h : [e,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $x \in [e,+\infty[$ par $h(x) = W(x) - \ln(x)$. h est dérivable sur $[e,+\infty[$ comme différence de fonctions dérivables, et pour $x \in [e,+\infty[$: $h'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(1+W(x))}$. Puisque W est positive sur $[e,+\infty[$ d'après la question 9, h' est négative sur $[e,+\infty[$, et h est donc décroissante sur **l'intervalle** $[e,+\infty[$. Par ailleurs $h(e) = W(e) - \ln(e) = 1 - 1 = 0$. Donc la fonction h est négative sur $[e,+\infty[$. C'est exactement dire que : $\forall x \in [e,+\infty[, W(x) \leqslant \ln(x)$!

12. On note que , pour $x \geqslant e, W(x)e^{W(x)} = x$, donc $\ln(W(x)) + W(x) = \ln(x)$. Or, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$ et par l'inégalité démontrée à la question précédente, on a $\ln(W(x)) \leqslant \ln(\ln(x))$. Donc $\ln(x) - W(x) = \ln(W(x)) \leqslant \ln(\ln(x))$: on en déduit l'inégalité demandée !

13. Résumons les deux questions précédentes : pour $x \geqslant e, \ln(x) - \ln(\ln(x)) \leqslant W(x) \leqslant \ln(x)$.

    Divisons ces inégalités par $\ln(x) > 0$: on a donc $1 - \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \leqslant \frac{W(x)}{\ln(x)} \leqslant 1$.

    Par encadrement, les deux membres de gauche et de droite tendant vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ (pour le membre de gauche, c'est une conséquence de la question 6), le quotient du milieu également.

14. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\left]\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$. Par ailleurs, soit $y \in \mathbb{R}$ et $x > 0$. On a : $f(x) = y \iff \ln(x) + x = y \iff \ln(x) = y - x \iff x = \frac{e^y}{e^x} \iff xe^x = e^y \iff g(x) = e^y \iff x = W(e^y)$. Conclusion : la bijection réciproque de f n'est autre que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donnée par $y \mapsto W(e^y)$.

15. On écrit sous forme exponentielle :

$$x^\pi = \pi^x \Leftrightarrow e^{x\ln(\pi)} = e^{\pi\ln(x)} \Leftrightarrow x\ln(\pi) = \pi\ln(x) \Leftrightarrow -\frac{\ln(\pi)}{\pi} = -\frac{\ln(x)}{x} \Leftrightarrow f(\ln(1/\pi)) = f(\ln(1/x))$$

    Mais on a $\pi > e$, donc $\ln(1/\pi) < -1$: ainsi, $f(\ln(1/\pi))$ possède deux antécédents :

    - un dans $]-\infty;-1[$, qui n'est autre que $\ln(1/\pi)$;
    - un dans $]-1;+\infty[$, qui est par définition $W(f(\ln(1/\pi)))$;

    Et ainsi :

$$x^\pi = \pi^x \Leftrightarrow \ln(1/x) = \ln(1/\pi) \text{ ou } \ln(1/x) = W(f(\ln(1/\pi))) \Leftrightarrow x = \pi \text{ ou } x = \exp\left(-W\left(\frac{\ln(1/\pi)}{\pi}\right)\right)$$

    Donc les solutions sont π et $\exp\left(-W\left(\frac{\ln(1/\pi)}{\pi}\right)\right)$.

16. On a directement l'équivalence :

$$ae^x + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(-x - \frac{c}{b}\right)e^{-x-\frac{c}{b}} = \frac{a}{b}e^{-\frac{c}{b}}$$

    (on passant l'exponentielle de l'autre côté du signe égal et en multipliant par $\frac{e^{-x-c/b}}{b}$, ce qui est possible comme $b \neq 0$).

    En posant $X = -x - \frac{c}{b}$, on est ramené à résoudre l'équation $Xe^X = \Delta$, c'est-à-dire $f(X) = \Delta$.

    Les variations de f donnent que :

- si $\Delta \geqslant 0$ ou $\Delta = -\frac{1}{e}$: cette équation a pour unique solution $X = W(\Delta)$, c'est-à-dire : $x = -W(\Delta) - \frac{c}{b}$;
- si $\Delta \in]-1/e; 0[$: cette équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$, donc la plus grande est dans $]-1; +\infty[$ et vaut $X = W(\Delta)$, c'est-à-dire : $x = -W(\Delta) - \frac{c}{b}$;
- sinon, c'est-à-dire $\Delta < -\frac{1}{e}$: l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.