DS n^{o}2

I Sommes et sommes doubles

Exercice 1

1. Somme arithmétique de raison 5 : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(5k+3) = (n-2)\cdot\frac{13+5n-2}{2} = \frac{(n-2)(5n+11)}{2}$

2. Somme arithmétique de raison -1, ou linéarité (au choix) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} n-k = (n+1)\cdot\frac{n-1-1}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

3. Somme binomiale : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}+1\right)^n = \frac{5^n}{3^n}$

4. Somme géométrique de raison $3 \neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2}\frac{3^{k-1}}{2^4} = \frac{1}{16}\frac{1-3^{n+2}}{1-3} = \frac{3^{n+2}-1}{32}$

5. Somme géométrique de raison $(1-x^2)$: deux cas :
   - si $(1-x^2)=1$ (c'est-à-dire $x=0$) : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(1-x^2)^k = \sum_{k=2}^{n-1}1 = n-2$;
   - si $(1-x^2)\neq 1$ (c'est-à-dire $x \neq 0$) : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(1-x^2)^k = (1-x^2)^2\frac{1-(1-x^2)^{n-2}}{1-(1-x^2)} = \frac{(1-x^2)^2-(1-x^2)^n}{x^2}$

6. Somme géométrique de raison $\dfrac{(x-1)}{(x+1)^{-1}} = (x-1)(x+1) = x^2-1$:
   - si $x^2-1=1$ (c'est-à-dire $x=\pm\sqrt{2}$) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(x-1)^k}{(x+1)^{-k}} = \sum_{k=0}^{n+1}1 = n+2$;
   - si $x^2-1\neq 1$ (c'est-à-dire $x\neq\pm\sqrt{2}$) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(x-1)^k}{(x+1)^{-k}} = \sum_{k=0}^{n+1}(x^2-1)^k = 1\cdot\frac{1-(x^2-1)^{n+2}}{1-(x^2-1)} = \frac{(x^2-1)^{n+2}-1}{x^2-2}$

7. Somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2}(k+1)^5-k^5 = (n+3)^5-1$

8. Somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1}\cos(2k+1)-\cos(2k-1) = \cos(2n-1)-\cos(5)$

9. Linéarité, et on se ramène à somme quadratique et arithmétique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \sum_{k=0}^{n}4k^2+4k+1 = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+2n(n+1)+(n+1) = \frac{(n+1)}{3}(2n(2n+1)+6n+3) = \frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

10. Binôme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^n\cdot n^k = 2^n\cdot((n+1)^n-1) = (2n+2)^n - 2^n$

11. Somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-3}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-3}\ln(k+1)-\ln(k) = \ln(n-2)-\ln(1) = \ln(n-2)$

12. On calcule aussi la somme des termes de rangs pairs (comme dans le cours et suggéré par l'indication). On pose $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}3^{2k}$ et $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}3^{2k+1}$. Alors :

$$A+B = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}3^l = 4^n \text{ et } A-B = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-3)^l = (1-3)^n = (-2)^n$$

et finalement : $A = \dfrac{(A+B)+(A-B)}{2} = \dfrac{4^n+(-2)^n}{2}$ et $B = \dfrac{(A+B)-(A-B)}{2} = \dfrac{4^n-(-2)^n}{2}$.

13. On coupe la somme en deux suivant la parité de k, qu'on regroupe par linéarité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k = \sum_{l=1}^{n}2l - \sum_{l=1}^{n}(2l-1) = \sum_{l=1}^{n}1 = n$

Autre méthode : on écrit bêtement la somme en extension :

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k = -1+2-3+4-5+6-\cdots-(2n-1)+2n = n.$$

14. Idem : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor = \sum_{l=1}^{n}\left\lfloor\frac{2l}{2}\right\rfloor + \sum_{l=1}^{n}\left\lfloor\frac{2l-1}{2}\right\rfloor = \sum_{l=1}^{n} l+(l-1) = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$.

Autre méthode : on écrit bêtement la somme en extension :

$$\sum_{k=1}^{2n}\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor = 0+1+1+2+2+\cdots+(n-1)+(n-1)+n = \frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2} = n^2$$

15. On utilise la formule du capitaine puis un binôme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1}n\binom{n-1}{l} = n2^{n-1}$

16. On utilise la formule du binôme en rééquilibrant les indices et les puissances : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}n^{k-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-n)^k = \frac{(1-n)^n-1+n^2}{n}$

17. On utilise la formule du capitaine dans l'autre sens et on fait apparaître un binôme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \sum_{l=1}^{n+1}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{l} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

18. On a un télescopage sur deux indices : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k+1}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \ln(k+1) = -\ln(n+1) - \ln(n) + \ln(2) + \ln(1) = -\ln\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$

19. On développe et on reconnaît par linéarité des sommes cubique, quadratique et arithmétique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+3)^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + 27\frac{n(n+1)}{2} + 27(n+1) = \frac{n+1}{4}\left(n^2(n+1) + 6n(2n+1) + 54n + 108\right) = \frac{n+1}{4}\left(n^3 + 13n^2 + 60n + 108\right)$

Exercice 2

1. $\displaystyle\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} k - l$:

   Pour $n = 1$, on trouve : 0.

   Formule générale : $\displaystyle\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} k-l = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(k-l) = \sum_{l=1}^{n} \frac{(1-l+n-l)(n+1}{2} = \sum_{l=1}^{n} \frac{(n+1-2l)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1)(n+1-2+n+1-2n)}{2} = 0$ (en reconnaissant deux sommes arithmétiques consécutives)

   Bonne valeur pour $n = 1$.

2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} 2k$

   Pour $n = 1$, on trouve : 2

   Formule générale : $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} 2k = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} 2k = \sum_{l=1}^{n} l(l+1) = \sum_{l=1}^{n} l^2+l = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   Bonne valeur pour $n = 1$.

3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} kl$

   Pour $n = 1$, on trouve : 1

   Formule générale : $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} kl = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} kl = \sum_{l=1}^{n} l\frac{l+l^2}{2} = \sum_{l=1}^{n} \frac{l^2+l^3}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n^2(n+1)^2}{8} = \frac{n(n+1)}{24}(2(2n+1) + 3n(n+1)) = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$

   Bonne valeur pour $n = 1$.

4. $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} \frac{k}{l}$

   Pour $n = 1$, on trouve : 1

Formule générale : $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n}\frac{k}{l}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\frac{k}{l}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{l(l+1)}2l=\sum_{l=1}^{n}\frac{l+1}{2}=n\frac{1+\frac{n+1}{2}}{2}=\frac{2n+n(n+1)}{4}=$ $\displaystyle\frac{n(n+3)}{4}$

Bonne valeur pour $n=1$.

5. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant l\leqslant n}\binom{l}{k}$

   Pour $n=1$, on trouve : $\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=1+1+1=3$.

   Formule générale : $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant l\leqslant n}\binom{l}{k}=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}=\sum_{l=0}^{n}2^l=1\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1.$

   Bonne valeur pour $n=1$.

6. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n}\binom{n+1}{k}l^k$

   Pour $n=1$, on trouve : $\binom{2}{0}0^0+\binom{2}{0}1^0+\binom{2}{1}0^1+\binom{2}{1}1^1=1+1+0+2=4$.

   Formule générale : $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n}\binom{n+1}{k}l^k=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}l^k=\sum_{l=0}^{n}\left((l+1)^{n+1}-l^{n+1}\right)=(n+1)^{n+1}$

   Bonne valeur pour $n=1$.

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\cdot 2^k$

   Pour $n=1$, on trouve : 2

   Formule générale : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\cdot 2^k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k-1}2^k=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l+1}^{n}2^k=\sum_{l=0}^{n}2^{l+1}\frac{2^{n-l}-1}{2-1}=\sum_{l=0}^{n}2^{n+1}-2^{l+1}=$ $\displaystyle(n+1)2^{n+1}-2\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=(n-1)2^{n+1}+2$

   Bonne valeur pour $n=1$.

8. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n}\max(k,l)$

   Pour $n=1$, on trouve : $0+1+1+1=3$.

   Formule générale : $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n}\max(k,l)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\max(k,l)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k-1}\max(k,l)+\sum_{l=k}^{n}\max(k,l)\right)=$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k-1}k+\sum_{l=k}^{n}l\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(k^2+\frac{(n-k+1)(n+k)}{2}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+k+n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+$ $\displaystyle\frac{n(n+1)}{4}+\frac{n(n+1)^2}{2}=\frac{n(n+1)}{12}\left(2n+1+3+6(n+1)\right)=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$

   Bonne valeur pour $n=1$

9. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n}|k-l|$

   Pour $n=1$, on trouve : $0+1+1+0=2$.

Formule générale : $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} |k-l| = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} |k-l| = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k}|k-l| + \sum_{l=k+1}^{n}|k-l|\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k}(k-l) + \sum_{l=k}^{n}\right.$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k+1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 - nk + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)}{2} +$
$\displaystyle\frac{n(n+1)^2}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(2n+1-3n+3n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
Bonne valeur pour $n=1$.

II Produits

Exercice 3

1. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} 3k = 3^n \prod_{k=2}^{n+1} k = 3^n(n+1)!$

2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n-1} 3k^3 = 3^{n-2}\left(\prod_{k=2}^{n-1} k\right)^3 = 3^{n-2}((n-1)!)^3$

3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{l=1}^{2n+1} l}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n(n!)}$

4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^{k-1} = 3^{\sum_{k=1}^{n} k-1} = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^{n-k} = 3^{\sum_{k=1}^{n} n-k} = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

6. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k^2-1) = \prod_{k=2}^{n}(k-1)(k+1) = \left(\prod_{k=2}^{n}(k-1)\right)\left(\prod_{k=2}^{n}(k+1)\right) = \frac{(n-1)!\cdot(n+1)!}{2} = (n-1)!^2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

7. $\displaystyle\prod_{k=3}^{n-2}\frac{k}{k+1} = \frac{3}{n-1}$

8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^{k^2} = 3^{\sum_{k=1}^{n} k^2} = 3^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

9. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(9k^2-1) = \prod_{k=1}^{n}(3k-1)(3k+1) = \frac{\prod_{l=1}^{3n+1} l}{\prod_{k=1}^{n} 3k} = \frac{(3n+1)!}{3^n(n!)}$

III Systèmes

Exercice 4

1. $(5, 1, -2)$ est l'unique solution ;
2. pas de solution ;
3. $(5/3, -1/3, 0)$ comme unique solution ;

   L'ensemble solution donné dans le premier corrigé était pour le système $\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ x + 5y = 0 \\ x + 11y + 2z = -2 \end{cases}$.
4. $(-1, 4, 2)$ est l'unique solution.

Exercice 5

1. $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y = a^2 \\ x - y + 3z = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ y - z = a^2 - a \\ 0 = a^3 + 2a^2 - 3a \end{cases}$;

   - si $a^3 + 2a^2 - 3a \neq 0$: c'est-à-dire $a \notin \{-3, 0, 1\}$ alors il n'y a pas de solution ;
   - sinon : c'est-à-dire $a \in \{-3, 0, 1\}$ alors dernière équation disparaît et le système devient :

     $$\begin{cases} x + y + z = a \\ y - z = a^2 - a \end{cases}$$

     dont les solutions forment : $\{(2a - 2z - a^2, z + a^2 - a, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$
2. $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + az = 1 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 \\ (2 - a - a^2)z = 1 - a \end{cases}$;

   - si $a = -2$: le système n'a pas de solution à cause de la dernière ligne qui devient $0 = 3$;
   - si $a = 1$: les deux dernières lignes deviennent $0 = 0$. Le système équivaut à $x + y + z = 1$, qui a pour ensemble solution :

     $$S = \{(1 - y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

     (et on pourrait paramétrer suivant un autre couple d'inconnues).
   - sinon : on remonte directement le dernier système, et le système a donc comme unique solution $\left(\dfrac{1}{a+2}, \dfrac{1}{a+2}, \dfrac{1}{a+2}\right)$.

   Et dans les trois cas on retrouve une symétrie parfaite entre x, y, z sur l'ensemble solution, ce qui est normal car les rôles sont les mêmes (et échangeables) dans le système de départ.
3. $\begin{cases} x + 2z = 4 \\ 2x + ay + 4z = 8 - a \\ -x - ay + (a^2 - 3a - 2)z = 2a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 4 \\ ay = -a \\ (a^2 - 3a)z = a \end{cases}$

   - si $a^2 - 3a \neq 0$: c'est-à-dire $a \notin \{0, 3\}$: on a un système échelonné qui possède une unique solution qui est : $\left(\dfrac{4a - 14}{a - 3}, -1, \dfrac{1}{a - 3}\right)$;
   - si $a = 0$: seule la première équation reste, et le système devient : $x + 2z = 4$, qui admet comme ensemble solution : $S = \{(4 - 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$;
   - si $a = 3$: la dernière équation devient $0 = 3$, qui n'a pas de solution, donc le système n'a aucune solution.