DS n^{o}2

I Sommes et sommes doubles

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes (sous réserve que n soit suffisamment grand pour qu'elles aient un sens), en précisant bien à chaque fois la formule utilisée (somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique, somme quadratique ou cubique, somme télescopique, etc.) :

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(5k+3)$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} n-k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2}\frac{3^{k-1}}{2^4}$
5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(1-x^2)^k$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(x-1)^k}{(x+1)^{-k}}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2}(k+1)^5-k^5$
8. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1}\cos(2k+1)-\cos(2k-1)$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2$
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^n\cdot n^k$
11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-3}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}3^{2k+1}$
13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$
14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$
15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$
16. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}n^{k-1}$
17. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$
18. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k-1}{k+1}\right)$
19. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+3)^3$

Indications :

- pour la 5 et la 6, on pourra procéder par disjonction de cas suivant la valeur de x ;
- pour la 12, on pourra considérer aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}3^{2k}$;
- pour la 13 et la 14, on pourra séparer la somme suivant la parité des indices ;
- pour la 19, on donnera le résultat sous forme $\dfrac{(n+1)}{4}P(n)$ où P est un polynôme qu'on ne cherchera pas à factoriser.

Exercice 2

On fixe $n, m \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes pour $n=1$, puis en donner une expression générale en fonction de n :

1. $\displaystyle\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} k-l$
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} 2k$
3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} kl$

4. $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} \frac{k}{l}$

5. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant l\leqslant n} \binom{l}{k}$

6. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} \binom{n+1}{k} l^k$

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cdot 2^k$

8. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} \max(k,l)$

9. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} |k-l|$

II Produits

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les produits suivants (sous réserve que n soit suffisamment grand pour qu'ils aient un sens), en détaillant bien les étapes de calcul :

1. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} 3k$

2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n-1} 3k^3$

3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$

4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^{k-1}$

5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^{n-k}$

6. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} (k^2-1)$

7. $\displaystyle\prod_{k=3}^{n-2} \frac{k}{k+1}$

8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^{k^2}$

9. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (9k^2-1)$

III Systèmes

Exercice 4

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 6y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ -2x & + & 5y & - & 2z & = & -1 \end{array}\right.$;

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & = & 2 \\ 3x & + & 5y & - & 8z & = & 4 \end{array}\right.$;

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & - & 2z & = & 2 \\ x & + & 5y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 11y & + & 2z & = & -2 \end{array}\right.$;

4. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & -7 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$.

Exercice 5

Discuter suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ des solutions des systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & & & = & a^2 \\ x & - & y & + & 3z & = & a^3 \end{array}\right.$;

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ ax & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$;

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & ay & + & 4z & = & 8-a \\ -x & - & ay & + & (a^2-3a-2)z & = & 2a-4 \end{array}\right.$.