DS n^{o}1 : corrigé

I Exercices

Exercice 1 1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$:

- pour $n = 0$: on a par hypothèse $u_0 = 1$, ce qui prouve l'initialisation ;
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1$. Alors par définition de (u_n) :

  $$u_{n+1} = 2u_n - 1 \overset{HR}{=} 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

  ce qui conclut l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

2. Si $n \leqslant 0$, on a directement : $2^n > 0$ (par définition de la puissance) et donc $2^n > n$.

   Montrons par récurrence le cas où $n \in \mathbb{N}^*$:

   - pour $n = 1$: on a $2^n = 2 > 1 = n$ ce qui prouve l'inégalité pour $n = 1$;
   - soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n > n$. Alors :

     $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{HR}{>} 2n = n + 1 + \underbrace{n - 1}_{\geqslant 0} \geqslant n + 1$$

     et ainsi $2^{n+1} > n + 1$, ce qui prouve l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence.

3. Montrons le résultat par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$:

   - initialisation :
     - si $n = 0$: $u_n = u_0 = 1$ (par hypothèse) et $2^n(1 - n) = 1 \cdot 1 = 1$; ce qui prouve le cas $n = 0$;
     - si $n = 1$: $u_n = u_1 = 0$ (par hypothèse) et $2^n(1 - n)2 \cdot 0 = 0$; ce qui prouve le cas $n = 1$.

     Ce qui prouve l'initialisation.
   - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 2^n(1-n)$ et que $u_{n+1} = 2^{n+1}(1-(n+1)) = -2^{n+1}n$. Alors :

     $$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \overset{HR}{=} -4 \cdot 2^{n+1}n - 4 \cdot 2^n(1-n) = 2^{n+2}\left(-2n - 1 + n\right) = 2^{n+2}\left(-1 - n\right) = 2^{n+2}\left(1 - (n +\right.$$

     ce qui prouve l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence.

Exercice 2 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'assertion A suivante :

$$A\ :\ (ab \geqslant a) \Rightarrow (a \leqslant 0 \text{ ou } b \geqslant 1)$$

1. Si ab est supérieur ou égal à a, alors a est inférieur ou égal à 0, ou b est supérieur ou égal à 1..
2. Négation : $(ab \geqslant a)$ et $(a > 0)$ et $(b < 1)$

   Contraposée : $(a > 0$ et $b < 1) \Rightarrow (ab < a)$

3. A est vraie : on le montre par contraposée.

   Supposons que $a > 0$ et $b > 1$. Montrons que $ab < a$.

   On a $b > 1$. Comme $a > 0$, en multipliant cette inégalité par a, on a : $ab < a$.

   Ce qui prouve la contraposée.

   Donc A est vraie.

   Remarque : on pourrait montrer que la négation de A est fausse, mais on aboutit aux même calculs.

4. La réciproque est : $(a \leqslant 0$ ou $b \geqslant 1) \Rightarrow (ab \geqslant a)$.

   Elle est fausse : prenons $b = 4$ et $a = -3$. On a bien $b \geqslant 1$ ou $a \leqslant 0$ (on a même les deux).

   Mais $ab = -12 < -3 = a$, donc l'inégalité $ab \geqslant a$ est fausse.

Exercice 3 1. $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right| \geqslant 2$: l'expression n'a de sens que pour $x \neq -3$.

Résolution de l'inéquation : Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x-1}{x+3}\right| \geqslant 2 &\Leftrightarrow |x-1| \geqslant 2|x+3| \text{ car } |x+3| > 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 \geqslant (2x+6)^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \geqslant (2x+6)^2 - (x-1)^2 = (x+7)(3x+5) \\
&\Leftrightarrow x \in \left[-7; -\frac{5}{3}\right] \\
&\Leftrightarrow x \in [-7; -3[\cup \left]-3; -\frac{5}{3}\right]
\end{aligned}$$

en reconnaissant le signe d'un polynôme du second degré (de coefficient dominant $3 > 0$, donc positif à l'extérieur de ses racines) et en utilisant que $x \neq 3$.

Ainsi l'inéquation admet pour ensemble solution : $[-7; -3[\cup \left]-3; -\frac{5}{3}\right]$.

Remarque : pour x tendant vers $\pm\infty$, le quotient tend vers 1 ce qui est rassurant car les valeurs infinie de x ne sont pas solution.

Cas d'égalité : pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, on trouve de même :

$$\left|\frac{x-1}{x+3}\right| = 2 \Leftrightarrow 0 = (x+7)(3x+5) \Leftrightarrow x = -7 \text{ ou } x = -\frac{5}{3}$$

et comme ces deux valeurs sont possibles, on déduit qu'il y a égalité si, et seulement si, $x = -7$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$.

2. $\sqrt{18-x} + \sqrt{7+x} \geqslant 7$: l'expression n'a de sens que si $18 - x \geqslant 0$ et si $7 + x \geqslant 0$, c'est-à-dire pour $x \in [-7; 18]$.

   Résolution de l'inéquation : Pour $x \in [-7; 18]$, on a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{18-x} + \sqrt{7+x} \leqslant 7 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{18-x} + \sqrt{7+x}\right)^2 \leqslant 7^2 \text{ car tout est positif} \\
&\Leftrightarrow (18-x) + (7+x) + 2\sqrt{(18-x)(7+x)} \leqslant 49 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(18-x)(7+x)} \leqslant 12 \\
&\Leftrightarrow (18-x)(7+x) \leqslant 144 \text{ car tout est positif} \\
&\Leftrightarrow -x^2 + 11x - 18 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow -(x-2)(x-9) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow x \in]-\infty; 2] \cup [9; +\infty[\\
&\Leftrightarrow x \in [-7; 2] \cup [9; 18]
\end{aligned}$$

en reconnaissant le signe d'un polynôme du second degré (de coefficient dominant $-1 < 0$, donc négatif à l'extérieur de ses racines) et en utilisant que $x \in [-7; 18]$.

Ainsi l'inéquation admet pour ensemble solution : $[-7; 2] \cup [9; 18]$.

Cas d'égalité : pour $x \in [-7; 18]$, on trouve de même :

$$\sqrt{18 - x} + \sqrt{7 + x} = 7 \Leftrightarrow 0 = -(x-2)(x-9) \leqslant 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 9$$

et comme ces deux valeurs sont possibles, on déduit qu'il y a égalité si, et seulement si, $x = 2$ ou $x = 9$.

Remarque : dans les deux cas, les cas d'égalités se vérifient facilement à la main.

Exercice 4 On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x+4}{x-1}$ et $g : x \mapsto x \cdot |x|$.

1. (a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour x dans cet ensemble, on a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-1} = y \underset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} x + 4 = y(x-1) \Leftrightarrow x(1-y) = -y - 4$$

et on résout cette dernière équation par disjonction de cas :

- si $y = 1$: alors l'équation devient $0 = -5$, qui n'a pas de solution.
- si $y \neq 1$: alors on peut diviser par $1 - y$ et on obtient :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{-y-4}{1-y} = \frac{y+4}{y-1}$$

et l'équation admet pour unique solution $\dfrac{y+4}{y-1} = f(y)$.

(b) On déduit ainsi que :

- si $y = 1$: alors y ne possède aucun antécédent par f ;
- si $y \neq 1$: alors $f(y)$ est l'unique antécédent de y (dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$).

Et donc, avec $I = J = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, la fonction f réalise bien une bijection de I dans J, avec $f^{-1} = y$.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = y \Leftrightarrow x \cdot |x| = y$$

qu'on résout séparément sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$:

- si $x \in \mathbb{R}_+$: $g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y$. Cette équation n'admet pas de solution si $y < 0$, et admet comme unique solution dans $\mathbb{R}_+$ le réel $\sqrt{y}$ sinon ;
- si $x \in \mathbb{R}_-$: $g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = -y$. Cette équation n'admet pas de solution si $y > 0$, et admet comme unique solution dans $\mathbb{R}_-$ le réel $-\sqrt{-y}$ sinon.

En particulier, peu importe la valeur de $y \in \mathbb{R}$, il possède un unique antécédent par g, à savoir $\sqrt{y}$ si $y \geqslant 0$ et $-\sqrt{-y}$ si $y \leqslant 0$.

Et ainsi g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec :

$$g^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \sqrt{y} & \text{si} & y \geqslant 0 \\ -\sqrt{-y} & \text{si} & y < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Exercice 5 On considère ici $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. "f est majorée" : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$
   Négation : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > M$
   "f est minorée" : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant m$
   Négation : $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < m$.

2. Supposons f bornée. Notons $m, M \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ m \leqslant f(x) \leqslant M.$$
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$. En appliquant le point précédent, on a :
   $$m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ et } m \leqslant f(y) \leqslant M$$
   et en multipliant la seconde inégalité par -1 et en les additionnant, on déduit :
   $$m - M \leqslant f(x) - f(y) \leqslant M - m$$
   donc $a = m - M$ et $b = M - m$ conviennent.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Avec $y = 0$, on déduit : $a \leqslant f(x) - f(0) \leqslant b$. Et donc :
   $$a + f(0) \leqslant f(x) \leqslant b + f(0)$$
   ce qui prouve que f est bornée : elle est minorée par $a + f(0)$ et majorée par $b + f(0)$.

4. Procédons par double implication :
   - si f est bornée : alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :
     $$\forall x, y \in \mathbb{R},\ a \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b$$
     et ce même b convient.
   - réciproquement, si f vérifie cette assertion : pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a donc :
     $$f(x) - f(y) \leqslant b \text{ et en échangeant les rôles de } x \text{ et } y\ f(y) - f(x) \leqslant b \text{ donc } f(x) - f(y) \geqslant -b$$
     et ainsi :
     $$\forall x, y \in \mathbb{R},\ -b \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b$$
     et par la question 3 on a bien que f est bornée. Ce qui prouve la réciproque.

   D'où l'équivalence demandée.

Exercice 6 1. La partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

2. (a) On a donc $\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor$. Par définition de la partie entière, comme $\lfloor x - 4 \rfloor$ est un entier, on a :
   $$\lfloor x - 4 \rfloor \leqslant 2x - 1 < \lfloor x - 4 \rfloor + 1$$
   et en utilisant que $x - 5 < \lfloor x - 4 \rfloor \leqslant x - 4$, on trouve bien l'inégalité voulue.

   (b) On a : $x - 5 < 2x - 1 < x - 3$.
   Donc $x - 5 < 2x - 1$ et $2x - 1 < x - 3$.
   Donc $-4 < x$ et $x < -2$.
   C'est-à-dire $x\ in] - 4; -2$. En déduire un encadrement de x.

3. Distinguons suivant les valeurs de x :
   - si $x \in]-4;-7/2[$: $\lfloor x-4 \rfloor = -8 \neq -9 = \lfloor 2x-1 \rfloor$ donc un tel x n'est pas solution ;
   - si $x \in [-7/2;-3[$: $\lfloor x-4 \rfloor = -8 = -8 = \lfloor 2x-1 \rfloor$ donc un tel x est solution ;
   - si $x \in [-3;-5/2[$: $\lfloor x-4 \rfloor = -7 = -7 = \lfloor 2x-1 \rfloor$ donc un tel x est solution ;
   - si $x \in [-5/2;-2[$: $\lfloor x-4 \rfloor = -7 = -6 = \lfloor 2x-1 \rfloor$ donc un tel x n'est pas solution.

4. On procède par analyse–synthèse :
   - analyse : (c'est la question 2) une solution, si elle existe, est dans $]-4,-2[$;
   - synthèse : (c'est la question 3) les seuls éléments de $]-4,-2[$ solutions sont les éléments de $[-7/2;-5/2[$.

   En conclusion : l'ensemble solution est $\boxed{\left[-\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right[}$.

II Problème

II.1 Une preuve de l'inégalité de Cauchy–Schwarz

1. La propriété $\mathcal{P}(1)$ est :
$$\boxed{\forall a_1, b_1 \in \mathbb{R},\ a_1 b_1 \leqslant \sqrt{a_1^2}\sqrt{b_1^2}}.$$
   Elle est vraie car, par propriétés de la valeur absolue, pour tous $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ on a :
$$a_1 b_1 \leqslant |a_1 b_1| = |a_1||b_1| = \sqrt{a_1^2}\sqrt{b_1^2}.$$

2. (a) Développons les deux membres de l'égalité à montrer. On a d'une part :
$$\begin{aligned}(a_1b_1+a_2b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 &= a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+2a_1b_1a_2b_2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2\\ &= \boxed{a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2}\end{aligned}$$
   et de même :
$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) = \boxed{a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2}$$
   ce qui prouve bien l'égalité demandée.

   (b) Soient $a_1, a_2 b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Alors :
$$a_1b_1+a_2b_2 \leqslant |a_1b_1+a_2b_2| = \sqrt{(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$
   mais par la question précédente on a :
$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 = (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) - \underbrace{(a_1b_2-a_2b_1)^2}_{\geqslant 0} \leqslant (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$$
   et donc par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\sqrt{(a_1b_1+a_2b_2)^2} \leqslant \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)} = \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}.$$
   En combinant ces inégalités, on a finalement :
$$\boxed{a_1b_1+a_2b_2 \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$
   ce qui était l'inégalité voulue.

   Ceci étant vrai pour tous $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, on déduit que la propriété $\boxed{\mathcal{P}(2) \text{ est vraie}}$.

3. (a) En appliquant la propriété $\mathcal{P}(n)$ aux $2n$ réels $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, on a :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

En ajoutant $a_{n+1} b_{n+1}$ à chaque membre de l'inégalité ci-dessus, on a bien l'inégalité demandée.

(b) Appliquons la propriété $\mathcal{P}(2)$ aux réels $A = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$, $B = \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$, $C = a_{n+1}$ et $D = b_{n+1}$. On a donc : $AB + CD \leqslant \sqrt{A^2 + C^2} \sqrt{B^2 + D^2}$, ce qui donne avec les valeurs précédentes de A, B, C, D :

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} + a_{n+1} b_{n+1} &\leqslant \sqrt{A^2 + a_{n+1}^2} \sqrt{B^2 + b_{n+1}^2} \\ &\leqslant \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2} \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2 + b_{n+1}^2}. \end{aligned}$$

En reprenant l'inégalité de la question précédente, on a finalement que :

$$\boxed{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} \leqslant \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2} \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2 + b_{n+1}^2}}.$$

Ceci étant vrai pour tous $a_1, \ldots, a_{n+1}, b_1, \ldots, b_{n+1} \in \mathbb{R}$, on a bien montré que la propriété $\boxed{\mathcal{P}(n+1) \text{ est vérifiée}}$.

4. On a donc montré que $\boxed{\mathcal{P}(1) \text{ est vraie}}$ et que $\boxed{\mathcal{P} \text{ est héréditaire}}$: par principe de récurrence, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}}.$$

5. (a) Rappelons l'inégalité triangulaire : pour $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité :

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|$$

avec égalité si, et seulement si, tous les x_i sont de même signe.
En l'appliquant ici aux $x_i = a_i b_i$, on a bien l'inégalité demandée, avec égalité si, et seulement si :

- ou bien tous les x_i sont positifs : c'est-à-dire que pour tout i, a_i et b_i sont de même signe ;
- ou bien tous les x_i sont négatifs : c'est-à-dire que pour tout i, a_i et b_i sont de signes opposés.

(b) Considérons $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.
Par la question précédente, on a :

$$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leqslant |a_1||b_1| + \cdots + |a_n||b_n| \ .$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz aux réels $|a_1|, \ldots, |a_n|, |b_1|, \ldots, |b_n|$, on a de même :

$$|a_1||b_1| + \cdots + |a_n||b_n| \leqslant \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2} \sqrt{|b_1|^2 + \cdots + |b_n|^2} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

en utilisant que $|x|^2 = (\pm x)^2 = x^2$.
En combinant les deux inégalités, il vient :

$$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leqslant \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Dans cette dernière inégalité, les deux membres sont positifs. Par stricte croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^2$, on peut donc préserver l'inégalité en mettant chaque membre au carré, donc :

$$|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n|^2 \leqslant \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}^2 \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}^2$$

ce qui donne :

$$\boxed{(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)}$$

Ce qui prouve l'inégalité demandée.

(c) Supposons que l'on soit dans le premier cas : notons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ a_i = \lambda b_i$. Alors :

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 = (\lambda b_1^2 + \cdots + \lambda b_n^2)^2 = \lambda^2(b_1^2 + \cdots + b_n^2)^2$$

et de même :

$$\begin{aligned}\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) &= \left(\lambda^2 b_1^2 + \lambda^2 b_2^2 + \cdots + \lambda^2 b_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \\ &= \lambda^2\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)^2\end{aligned}$$

ce qui donne bien que l'inégalité de Cauchy–Schwarz est alors une égalité.

Si on est dans le deuxième cas, la preuve est exactement la même (et revient en fait à échanger les rôles de a_i et b_i pour tout i).

II.2 Inégalités des moyennes

6. (a) On a :

$$\boxed{A_2(a,b) = \frac{a+b}{2},\ G_2(a,b) = \sqrt{ab},\ H_2(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b},\ Q_2(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

et toutes ces quantités sont strictement positives, comme a, b le sont aussi.

(b) On montre séparément les trois inégalités, avec le cas d'égalité. Comme toutes les quantités à comparer sont positives, notons déjà qu'il suffit de comparer leurs carrés.

- $H_2(a,b) \leqslant G_2(a,b)$:

$$\begin{aligned} H_2(a,b) \leqslant G_2(a,b) &\Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \\ &\Leftrightarrow \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leqslant ab \\ &\Leftrightarrow 4ab \leqslant (a+b)^2 \text{ en multipliant par } \frac{(a+b)^2}{ab} > 0 \\ &\Leftrightarrow 4ab \leqslant a^2 + 2ab + b^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \end{aligned}$$

et la dernière inégalité est toujours vraie (un carré de réel est toujours positif ou nul), ce qui prouve bien que : $\boxed{H_2(a,b) \leqslant G_2(a,b)}$.

De plus, les mêmes calculs montrent que l'on a égalité si, et seulement si, $(a-b)^2 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{a = b}$.

- $G_2(a,b) \leqslant A_2(a,b)$:

$$\begin{aligned} G_2(a,b) \leqslant A_2(a,b) &\Leftrightarrow \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \\ &\Leftrightarrow ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4} \\ &\Leftrightarrow 4ab \leqslant (a+b)^2 \text{ en multipliant par } 4>0 \\ &\Leftrightarrow 4ab \leqslant a^2+2ab+b^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \end{aligned}$$

  et à nouveau la dernière inégalité est vraie (c'est la même), ce qui prouve bien que : $\boxed{G_2(a,b) \leqslant A_2(a,b)}$.
  Les mêmes calculs conduisent également à une égalité au départ si, et seulement si, $(a-b)^2 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{a=b}$.
- $A_2(a,b) \leqslant Q_2(a,b)$:

$$\begin{aligned} A_2(a,b) \leqslant Q_2(a,b) &\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} \\ &\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \leqslant 2a^2+2b^2 \text{ en multipliant par } 4>0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \end{aligned}$$

  et à nouveau la dernière inégalité est vraie (c'est la même), ce qui prouve bien que : $\boxed{A_2(a,b) \leqslant Q_2(a,b)}$.
  Les mêmes calculs conduisent également à une égalité au départ si, et seulement si, $(a-b)^2 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{a=b}$.

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{H_2(a,b) \leqslant G_2(a,b) \leqslant A_2(a,b) \leqslant Q_2(a,b)}$, avec égalité dans n'importe laquelle des inégalités si, et seulement si, $\boxed{a=b}$.

7. (a) Posons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x-1} - x$.
Les fonction exp, $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables (fonctions usuelles ou polynomiales) sur $\mathbb{R}$, donc par composée et somme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = e^{x-1} - 1$$

et on a donc les variations suivantes pour f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(où on a rajouté les limites en $\pm\infty$ bien que celles-ci ne soient pas utiles)
Et on déduit ainsi des variations de f sur $\mathbb{R}$ que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant f(1) = 0$$

avec égalité si, et seulement si, $x = 1$.
Ce qui prouve bien que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant e^{x-1} \text{ avec égalité si, et seulement si, } x = 1}.$$

(b) Appliquons déjà l'inégalité précédente aux réels $\frac{a_i}{A_n(a_1, \ldots, a_n)}$. On a ainsi :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ 0 < \frac{a_i}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} \leqslant \exp\left(\frac{a_i}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} - 1\right)}$$

On peut multiplier toutes les inégalités (comme elles sont toutes positives et dans le même sens), ce qui donne :

$$0 < \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{(A_n(a_1, \ldots, a_n))^n} \leqslant \exp\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} - n\right)$$

(par propriété de l'exponentielle sur les produits)
Mais, par définition de A_n, on a :

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} - n = \frac{nA_n(a_1, \ldots, a_n)}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} - n = n - n = 0$$

et ainsi :

$$0 < \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{(A_n(a_1, \ldots, a_n))^n} \leqslant 1.$$

En multipliant par $(A_n(a_1, \ldots, a_n))^n$ (qui est strictement positif), on déduit :

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant (A_n(a_1, \ldots, a_n))^n$$

et par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, on a finalement :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant A_n(a_1, \ldots, a_n).$$

Et ainsi on a bien : $\boxed{G_n(a_1, \ldots, a_n) \leqslant A_n(a_1, \ldots, a_n)}$.
Pour le cas d'égalité, la stricte croissance de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ impose que l'on a égalité à la fin si, et seulement si, on a égalité à chaque étape du calcul. C'est-à-dire si, et seulement si, pour tout i on a :

$$\frac{a_i}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} \leqslant \exp\left(\frac{a_i}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} - 1\right).$$

Par la question précédente, c'est le cas si, et seulement si, pour tout i :

$$\frac{a_i}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} = 1$$

et donc :

$$\boxed{a_1 = a_2 = \cdots = a_n = A_n(a_1, \ldots, a_n)}.$$

<u>Nécessairement</u>, s'il y a égalité, alors tous les a_i sont égaux.
<u>Réciproquement</u>, supposons que tous les a_i sont égaux. Posons $a \in \mathbb{R}_+^*$ leur valeur commune. Alors :

$$A_n(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a + a + \cdots + a}{n} = \frac{na}{n} = a$$

et donc on a bien $a_1 = \cdots = a_n = A_n(a_1, \ldots, a_n)$, car toutes ces quantités valent a.
Et finalement : <u>il y a égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux.</u>

8. (a) Par définition, on a :

$$\boxed{H_n(a_1, \ldots, a_n)} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}} \boxed{= \frac{1}{A_n\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)}}.$$

(b) Appliquons le résultat précédents aux $\dfrac{1}{a_i}$. On a ainsi :

$$G_n\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right) \leqslant A_n\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$$

avec égalité si, et seulement si, les $\frac{1}{a_i}$ (donc tous les a_i) sont égaux.
Mais $G_n\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right), A_n\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$ sont strictement positifs : par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc :

$$\underbrace{\frac{1}{A_n\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)}}_{H_n(a_1,\dots,a_n)} \leqslant \frac{1}{G_n\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)}$$

avec égalité si, et seulement, les a_i sont égaux.
Mais on a aussi :

$$\frac{1}{G_n\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}}} = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = G_n(a_1, \dots, a_n).$$

Et finalement, on trouve bien :

$$\boxed{H_n(a_1, \dots, a_n) \leqslant G_n(a_1, \dots, a_n)}$$

avec égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux.

9. Appliquons l'inégalité de Cauchy–Schwarz aux réels $a_1, a_2, \dots, a_n, 1, 1, \dots, 1$. On a :

$$(a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)$$

c'est-à-dire :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot n$$

et par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ (comme tout est positif ci-dessus) :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}\sqrt{n}$$

et en divisant par $n > 0$, on trouve :

$$\underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}_{=A_n(a_1,\dots,a_n)} \leqslant \underbrace{\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}}_{=Q_n(a_1,\dots,a_n)}$$

ce qui est l'inégalité demandée.

Pour le cas d'égalité, on a donc égalité dans la dernière inégalité si, et seulement si, l'inégalité de Cauchy–Schwarz que l'on a utilisée est une égalité. Par le résultat de la première partie, c'est le cas si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\},\ a_i = \lambda) \text{ ou } (\forall i \in \{1, \dots, n\},\ 1 = \lambda a_i)$$

ce qui donne dans les deux cas que tous les a_i sont égaux (dans le premier cas égaux à λ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, et dans le second à $\frac{1}{\lambda}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}^*$).

II.3 Quelques applications

10. Notons S la surface que l'on fixe. Considérons a, b, c les longueurs des trois côtés du parallélépipède rectangle considéré.

    On a ainsi : $S = 2(ab + bc + ca)$.

    Le volume du parallélépipède est de $V = abc$.

    Par la question 7, on a :

$$G_3(ab, bc, ca) = \sqrt[3]{(abc)^2} = \sqrt[3]{V^2} \leqslant \frac{ab + bc + ca}{3} = \frac{S}{6}.$$

    Par croissance de la racine carrée, on a donc :

$$\sqrt[3]{V} \leqslant \sqrt{\frac{S}{6}}$$

    et par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$:

$$\boxed{V \leqslant \left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^3 = \sqrt{\frac{S^3}{216}}}.$$

    Reste à montrer que c'est une égalité si, et seulement si, on a un cube. Mais d'après la condition d'égalité de la question 7, on a une égalité si, et seulement si : $ab = bc = ca$, c'est-à-dire $a = b = c$.

    C'est bien la situation du cube !

    On peut vérifier d'ailleurs que l'on a bien égalité pour le cube : si on a un cube de côté a, alors : $S = 6a^2$ et $V = a^3$ et on a bien :

$$V = a^3 \text{ et } \sqrt{\frac{S^3}{216}} = \sqrt{a^6} = a^3.$$

11. Considérons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels strictement positifs de somme 1. Pour tout i, posons $a_i = \sqrt{\alpha_i}$ et $b_i = \frac{1}{a_i} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}}$.

    Appliquons l'inégalité de Cauchy–Schwarz aux réels $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. On a :

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1 b_1}_{=1} + \cdots + \underbrace{a_n b_n}_{=1}\right)^2}_{=n^2} \leqslant \underbrace{\left(\underbrace{a_1^2}_{=\alpha_1} + \cdots + \underbrace{a_n^2}_{=\alpha_n}\right)}_{=1} \underbrace{\left(\underbrace{b_1^2}_{=1/\alpha_1} + \cdots + \underbrace{b_n^2}_{=1/\alpha_n}\right)}_{=\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}}.$$

    Et finalement, on trouve que :

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n} \geqslant n^2}$$

    comme demandé.

    Remarque : ce n'est pas demandé, mais on a égalité si, et seulement si, tous les α_i sont égaux. On veut en effet, pour avoir égalité, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout i : $\sqrt{\alpha_i} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha_i}}$, c'est-à-dire que $\alpha_i = \lambda$.