DS n^{o}12

I Exercices

Exercice 1 On procède par disjonction de cas :

- si $|a| > 1$: par croissances comparées, $|u_n|$ tend vers $+\infty$, et plus précisément :
  - si $a > 1$: u_n tend vers $+\infty$;
  - si $a < 1$: les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$ donc la suite (u_n) n'a pas de limite.

  Et dans tous les cas pour ces valeurs de a : la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- si $|a| < 1$: alors par croissances comparées on a :
$$n^2 u_n \to 0$$
  donc $u_n = \mathrm{o}(1/n^2)$. Et la série de terme général $1/n^2$ converge absolument (par Riemann, comme $2 > 1$). Donc la série $\sum u_n$ converge (elle converge même absolument).
- si $a = 1$: peu importe la valeur de b, on a par croissances comparées :
$$nu_n = n\ln(n)^b \to 0$$
  donc $\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}(u_n)$ avec u_n de signe constant. Par contraposée du théorème de comparaisons de séries à termes positifs, comme $\sum 1/n$ diverge (par Riemann, comme $1 \leqslant 1$), la série $\sum u_n$ diverge ;
- si $a = -1$:
  - si $b \geqslant 0$: la série diverge grossièrement car $|u_n|$ tend vers 1 (si $b = 0$) ou $+\infty$ (si $b > 0$) (et on pourrait comme en début de question détailler le mode de divergence pour (u_n)) ;
  - si $b < 0$: la suite $(\ln(n)^b)$ est décroissante, positive, tendant vers 0. Par critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 2 On considère $f : x \mapsto \dfrac{x^5}{1+x^3}$.

1. Les fonctions $x \mapsto x^5$ et $x \mapsto 1 + x^3$ sont des polynômes, et sont donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto 1 + x^3$ ne s'annulant qu'en -1, on déduit par quotient que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Notons déjà que f est continue sur $[0; 1]$, donc l'intégrale à calculer a bien un sens, et on a :
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{t^5}{1+t^3}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^2 - \frac{t^2}{1+t^3}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}\ln(1+t^3)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{\ln(2)}{3}\end{aligned}$$
   ce qui est le résultat demandé.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^5}{k^3+n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{k^5}{n^5}}{\frac{k^3}{n^3}+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
La fonction f étant continue sur $[0;1]$, la somme de Riemann $\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^5}{k^3+n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1-\ln(2)}{3}$.
Et ainsi :
$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^5}{k^3+n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(1)}{n}$$
tend également vers $\frac{1-\ln(2)}{3}$, comme $\frac{f(1)}{n} = \frac{1}{2n}$ tend vers 0.

Exercice 3 On considère la suite (u_n) et la fonction f définie respectivement par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{et } f : x \mapsto \ln(1+x).$$

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   - $u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$;
   - $u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3-1}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$;
   - $u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

   Et ainsi : la suite (u_{2n}) est croissante, la suite (u_{2n+1}) est décroissante, et leur différence tend vers 0. Elles sont donc adjacentes, et convergent vers une même limite finie ℓ.

   Les suites extraites des termes de rangs pairs et impairs de (u_n) convergent donc vers la même limite ℓ : donc (u_n) converge vers ℓ également.

2. La fonction f est la composée de la fonction $x \mapsto 1+x$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ comme polynôme et à valeurs dans $[1;+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$, et de la fonction ln, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, cela assure que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

   Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que : $f^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.
   - si $k=1$: par dérivée d'une composée, on a :
   $$f' : x \mapsto \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{(1+x)^1}$$
   avec la convention que $0! = 1$, ce qui prouve l'initialisation ;
   - soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $f^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$. Par linéarité de la dérivation, on a :
   $$f^{(k+1)} : x \mapsto (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{-k}{(1+x)^{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1-1}((k+1)-1)!}{(1+x)^{(k+1)-1}}.$$
   Ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. Et donc, comme $f(0) = 0$:
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k.$$
De plus, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0;1]$ avec :
$$\forall t \in [0;1],\ \left|f^{(n+1)}(t)\right| = \frac{n!}{(1+t)^n} \leqslant n!$$
et donc par inégalité de Taylor–Lagrange :
$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k \right| \leqslant \frac{n!(1-0)^{n+1}}{(n+1)!}$$
c'est-à-dire :
$$|\ln(2) - u_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$$
Par encadrement, il vient donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2) - u_n = 0$, et donc :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2).$$

Exercice 4

1. $\Delta_1 = \left|3\right| = 3$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7.$

2. Par pivot sur les colonnes puis en développant sur la première ligne :
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 6 = 15.$$

3. On développe Δ_{n+2} suivant la première colonne :
$$\Delta_{n+2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
et en développant le déterminant suivant la première ligne on a directement qu'il vaut Δ_n. Le premier est exactement Δ_{n+1}.

   D'où la relation demandée.

4. La suite (Δ_n) est une suite linéaire récurrente de polynôme caractéristique $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ donc il existe deux constantes λ, μ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \lambda + \mu 2^n.$$
Avec $\Delta_1 = 3$ et $\Delta_2 = 7$, on déduit :
$$\lambda + 2\mu = 3 \text{ et } \lambda + 4\mu = 7$$
donc $\lambda = -1$ et $\mu = 2$, c'est-à-dire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = 2^{n+1} - 1.$$
La valeur est cohérente avec Δ_3.

II Problème

II.1 Réduction de J_n

1. Comme v a tous ses coefficients égaux à 1, alors chaque coefficient de $J_n\mathbf{v}$ vaut : $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} \cdot 1 = 1$. Et donc : $J_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

2. L'image de J_n est l'espace vectoriel engendré par ses colonnes : toutes les colonnes de J_n sont identiques, égales à $\dfrac{1}{n}\mathbf{v}$. Et ainsi : $\mathrm{Im}(J_n) = \mathrm{vect}\,(\mathbf{v})$.

   On déduit que $\mathrm{rg}(J_n) = 1$ (le vecteur non nul $\mathbf{v}$ constitue une base de $\mathrm{Im}(J_n)$. Par théorème du rang, on a donc : $\dim\mathrm{Ker}(J_n) = n - 1$.

3. Montrons que la famille des f_i est libre. Considérons $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i = 0$. En remplaçant les f_i en fonction des e_i, on déduit :

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (e_i - e_n) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) e_n$$

   qui est une combinaison linéaire en les (e_i) nulle. Comme les (e_i) forment une base, c'est une famille libre, et donc tous les scalaires précédents sont nuls. Donc tous les λ_i sont nuls : la famille des (f_i) est libre.

   Comme toutes les colonnes sont égales, on déduit que les vecteurs f_i sont des éléments de $\mathrm{Ker}J_n$. Et la famille des $(f_i)_{2 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, de cardinal $n - 1$ dans $\mathrm{Ker}J_n$ de dimension $n - 1$: c'est donc une base de $\mathrm{Ker}J_n$.

4. On a directement que, comme J_n a tous ses coefficients égaux à $\dfrac{1}{n}$, alors tous les coefficients de J_n^2 valent :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

   et donc : $J_n^2 = J_n$.

   Ainsi, J_n est la matrice d'un projecteur : elle est semblable à une matrice diagonale ne comportant que des 0 et des 1 sur sa diagonale. Par invariance du rang par similitude, on sait même que cette matrice diagonale comportera un seul 1 sur sa diagonale.

5. (a) La famille $(\mathbf{v}, e_2, \dots, e_n)$ ayant cardinal $n = \dim(\mathbb{R}^n)$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre.

   Or, la famille $(e_2, \dots, e_n)$ est libre (comme c'est une base de $\mathrm{Ker}J_n$). Il suffit donc de prouver que $\mathbf{v} \notin \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n) = \mathrm{Ker}J_n$ pour conclure. Mais $\mathbf{v} \neq 0$ donc $J_n\mathbf{v} = v \neq 0$, et donc $\mathbf{v} \notin \mathrm{Ker}J_n$.

   La famille $(\mathbf{v}, e_2, \dots, e_n)$ est donc bien une base de $\mathbb{R}^n$.

   (b) On a :

$$J_n\mathbf{v} = \mathbf{v} \text{ et } \forall k \in [\![2; n]\!], J_n e_k = 0$$

   donc la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à J_n dans la base $(\mathbf{v}, e_2, \dots, e_n)$ est D_n (par définition).

   Si l'on note P_n la matrice de passage de la base canonique dans $(\mathbf{v}, e_2, \dots, e_n)$, on a bien $J_n = P_n D_n P_n^{-1}$ par formule de changement de base.

II.2 Une équation autour du déterminant

On fixe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation (E) d'inconnue le réel x:

$$\det(M + xJ_n) = 0. \qquad (E)$$

On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de l'équation (E).

6. Si $M = 0$, on cherche les réels x tels que $\det(xJ_n) = 0$.

   Or, par caractère n-linéaire du déterminant, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\det(xJ_n) = x^n \det(J_n) = 0$ (comme J_n est non inversible, donc de déterminant nul).

   Et ainsi : $\mathcal{S}_E = \mathbb{R}$.

7. (a) On utilise que $J_n = P_n D_n P_n^{-1}$. On a ainsi :

   $$I_n + xJ_n = I_n + xP_n D_n P_n^{-1} = P_n I_n P_n^{-1} + xP_n D_n P_n^{-1} = P_n \left(I_n + xD_n\right) P_n^{-1}$$

   Les matrices $I_n + xJ_n$ et ${}_n + xD_n$ sont donc semblables : elles ont même déterminant. La matrice $I_n + xD_n$ est diagonale, de coefficients diagonaux $1 + x, 1, 1, \ldots, 1$. Et finalement :

   $$\det(I_n + xJ_n) = 1 + x$$

   (b) Et ainsi :

   $$x \in \mathrm{S}_E \Leftrightarrow 1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

   donc $\mathcal{S}_E = \{-1\}$.

8. (a) Soit $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker}(M + xJ_n)$. Alors $0 = (M + xJ_n)\mathbf{w} = M\mathbf{w} + xJ_n\mathbf{w}$.
   En multipliant par M^{-1}, on a donc : $0 = \mathbf{w} + xM^{-1}J_n\mathbf{w}$ puis :

   $$\mathbf{w} = M^{-1} \cdot \underbrace{(J_n(-x\mathbf{w}))}_{\in \mathrm{Im} J_n = \mathrm{vect}(\mathbf{v})} \in \mathrm{Vect}(M^{-1}\mathbf{v})$$

   et donc $\mathbf{w}$ est bien colinéaire au vecteur $M^{-1}v$.

   (b) En remplaçant $\mathbf{w}$ par son expression, on a :

   $$(M + xJ_n)\mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} + xJ_n(M^{-1}\mathbf{v}) = 0$$

   Mais, comme J_n a tous ses coefficients égaux à $\dfrac{1}{n}$, on déduit que tous les coefficients de $J_n M^{-1}\mathbf{v}$ sont égaux à :

   $$\sum_{i=1}^{n} \frac{[M^{-1}\mathbf{v}]_i}{n} = \frac{\sigma}{n}$$

   de sorte que : $J_n M^{-1}\mathbf{v} = \dfrac{\sigma}{n}\mathbf{v}$.
   Et finalement :

   $$(M + xJ_n)\mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} + x\frac{\sigma}{n}\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \left(1 + x\frac{\sigma}{n}\right)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow 1 + x\frac{\sigma}{n} = 0$$

   où la dernière équivalence vient du fait que $\mathbf{v} \neq 0$.
   Et finalement on a deux cas :

   - si $\sigma = 0$: alors $x \in \mathcal{S}_E \Leftrightarrow 1 = 0$, donc $\mathcal{S}_E = \emptyset$;
   - si $\sigma \neq 0$: alors $x \in \mathcal{S}_E \Leftrightarrow 1 + x\dfrac{\sigma}{n} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-n}{\sigma}$, et donc $\mathcal{S}_E = \left\{\dfrac{-n}{\sigma}\right\}$.

Et donc $\mathcal{S}_E$ est au plus de cardinal 1, et est non vide si, et seulement si, $\sigma \neq 0$.

9. (a) Comme M est non inversible, alors $\det(M) = 0$, donc $0 \in \mathcal{S}_E$, qui est non vide.

   (b) On a directement les équivalences :

$$\det(M + xJ_n) = 0 \Leftrightarrow \det(M + bJ_n + (x - b)J_n) = 0$$

   et ainsi x est solution de (E) si, et seulement si, $(x - b)$ est solution de (F).
   C'est-à-dire que l'application $x \mapsto x - b$ réalise une bijection entre $\mathcal{S}_E$ et les solutions de (F).

   (c) Raisonnons par disjonction de cas :

   - s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $M + bJ_n$ est inversible : alors on applique le résultat de la question 7) pour résoudre l'équation (F). On déduit que l'équation (F) admet au plus une solution, donc S_E contient au plus un élément. Comme on a montré en 8)a) que $0 \in \mathcal{S}_E$, alors $\mathcal{S}_E = \{0\}$;
   - s'il n'existe pas de tel b : alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a : $\det(M + bJ_n) = 0$. Et donc tout réel est solution : $\mathcal{S}_E = \mathbb{R}$.

10. Pour $x \in \mathbb{R}$, la matrice $M + xJ_n$ a tous ses coefficients de la forme $m_{i,j} + \dfrac{x}{n}$: en retranchant la première colonne aux autres, les coefficients deviennent inchangés pour la première colonne, et de la forme $m_{i,j} - m_{i,1}$ pour les autres : un développement du déterminant suivant la première colonne de $M + xJ_n$ après ces opérations élémentaires donne bien une fonction affine. Son ordonnée à l'origine est sa valeur en 0, donc $\det(M)$, tandis que les éléments de $\mathcal{S}_E$ sont ses points d'annulation :

    - si M est inversible : $\det(M) \neq 0$, donc $f(0) \neq 0$; f est une fonction affine ne passant pas par l'origine. Et elle est soit de pente nulle, et ne s'annule pas, soit de pente non nulle et s'annule une unique fois. On retrouve que $\mathcal{S}_E$ contient au plus un élément ;
    - si M n'est pas inversible : $\det(M) = 0$, donc f est une fonction affine qui passe par l'origine. Et elle est soit de pente nulle, et s'annule sur $\mathbb{R}$ entier ; soit de pente non nulle, et ne s'annule qu'en 0. Et donc $\mathcal{S}_E$ vaut soit $\{0\}$ soit $\mathbb{R}$.