

DS n°12

I Exercices

Exercice 1

Étudier, suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général $u_n = a^n \ln(n)^b$.

Exercice 2

On considère $f : x \mapsto \frac{x^5}{1+x^3}$.

1. Donner le domaine de définition de f , et justifier qu'elle y est de classe \mathcal{C}^∞ .
2. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1 - \ln(2)}{3}.$$

3. En déduire la valeur de : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^n \frac{k^5}{k^3 + n^3}$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) et la fonction f définie respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ et } f : x \mapsto \ln(1+x).$$

1. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
2. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+ , et montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}.$$

3. En déduire la limite de (u_n) .

Indication : on pourra appliquer l'inégalité de Taylor–Lagrange à f entre 0 et 1.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le déterminant de taille n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $\Delta_1 = 3$ et $\Delta_2 = 7$.
2. Calculer Δ_3 .
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
4. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II Problème

Soit $n \geq 2$. On considère la matrice J_n de taille n à coefficients réels dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$:

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur colonne de \mathbb{R}^n dont toutes les coordonnées sont égales à 1 est noté \mathbf{v} .

II.1 Réduction de J_n

1. Calculer $J_n \mathbf{v}$.
2. Déterminer l'image de J_n , en explicitant une base ainsi que la dimension. En déduire la dimension du noyau de J_n .
3. On note (e_i) la base canonique de \mathbb{R}^n . Montrer que la famille (f_1, \dots, f_{n-1}) , définie par $f_i = e_i - e_n$ pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, est libre. En déduire une base de $\text{Ker} J_n$.
4. Calculer J_n^2 . En déduire que J_n est semblable à une matrice diagonale dont on précisera les valeurs possibles des coefficients diagonaux.
5. Soit $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale suivante:

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) On considère (e_2, \dots, e_n) une base de $\text{Ker} J_n$. Montrer que $(\mathbf{v}, e_2, \dots, e_n)$ est une base de \mathbb{R}^n .
- (b) En déduire qu'il existe $P_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $J_n = P_n D_n P_n^{-1}$.

II.2 Une équation autour du déterminant

On fixe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation (E) d'inconnue le réel x :

$$\det(M + xJ_n) = 0. \quad (E)$$

On note \mathcal{S}_E l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

6. On suppose pour cette question uniquement que $M = 0$ (la matrice nulle) : déterminer \mathcal{S}_E .

7. On suppose pour cette question uniquement que $M = I_n$, où I_n désigne la matrice identité.

(a) À l'aide des questions 4. ou 5., calculer $\det(I_n + xJ_n)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(b) En déduire que \mathcal{S}_E est réduit à un unique élément, que l'on précisera.

8. On suppose pour cette question que M inversible. On fixe $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que tout vecteur \mathbf{w} dans le noyau de $M + xJ_n$ est colinéaire au vecteur $M^{-1}\mathbf{v}$.

(b) Soit $\mathbf{w} = M^{-1}\mathbf{v}$. On notant σ la somme des coordonnées du vecteur $M^{-1}\mathbf{v}$, démontrer l'équivalence:

$$(M + xJ_n)\mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow (1 + x\frac{\sigma}{n}) = 0.$$

En déduire que \mathcal{S}_E est au plus de cardinal 1. Pour quelles valeurs de σ , l'ensemble \mathcal{S}_E est-il vide?

9. On suppose pour cette question que M est non inversible.

(a) Montrer que \mathcal{S}_E est non vide.

(b) S'il existe un réel b tel que $M + bJ_n$ est inversible, établir une bijection entre \mathcal{S}_E et l'ensemble des solutions de l'équation (F) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ définie par:

$$\det(M + bJ_n + xJ_n) = 0. \quad (F)$$

(c) Conclure.

10. On pose $f : x \mapsto \det(M + xJ_n)$. Montrer que f est affine, et donner son ordonnée à l'origine en fonction de M . Retrouver les résultats des questions précédentes.