

## DS n°9

## I Exercices

## Exercice 1 [Calculs de développements limités]

1. D'après un résultat du cours, on a déjà :

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

et on utilise que :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

et en primitivant, en utilisant que  $\tan(0) = 0$ , il vient :

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

2. Par développements limités de cos et sin en 0, on a directement :

$$\cos(x) - \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

3. Comme ci-dessus, on a directement :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} \cdot (\ln(1+x) - x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{48}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

4. On pose  $x = 3 + h$  (avec donc  $h$  qui tend vers 0 pour  $x$  tendant vers 3). On a :

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \ln(3+h) = \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \ln(3) + h/3 - \frac{(h/3)^2}{2} + \frac{(h/3)^3}{3} + o(h^3) \underset{h \rightarrow 0}{=} \ln(3) + \frac{1}{3}h - \frac{1}{18}h^2 + \frac{1}{81}h^3 + o(h^3) \\ &\underset{x \rightarrow 3}{=} \ln(3) + \frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{18}(x-3)^2 + \frac{1}{81}(x-3)^3 + o((x-3)^3) \end{aligned}$$

5. Par développement limité de l'exponentielle en 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(2 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{-1/2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)^{-1/2}$$

et en utilisant que  $(1+u)^{-1/2} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o(u^2)$ , avec  $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$  (qui tend bien vers 0 quand  $x$  tend vers 0), on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + o(x^2)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{\sqrt{2}}{64}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

6. On sépare numérateur et dénominateur. Et surtout on calcule de développement limité de l'inverse du dénominateur pour se ramener à un produit. On a :

$$\frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2) \right)$$

$$\exp(x) - 1 - x \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

et par produit :

$$\frac{\exp(x) - 1 - x}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$$

**Exercice 2** [Un peu d'algèbre linéaire]

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^3$  par :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y - z \\ x - y \\ 2x - 2y \end{pmatrix}.$$

1. C'est directement l'application linéaire canoniquement associée à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  ce qui assure la linéarité. Elle est clairement définie de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  ce qui donne le fait que ce soit un endomorphisme.
2. On résout le système associé au noyau. Pour  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x - 2y = y \\ x = y \end{cases}$$

ce qui donne directement :  $\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . Et la famille constituée du seul vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est bien une base du noyau, comme elle est génératrice (par construction) et libre (un seul vecteur **non nul**).

3. (a) On résout le système associé :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z = a \\ x - y = b \\ 2x - 2y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z = a \\ x - y = b \\ 0 = c - 2b \end{cases}$$

Et on retrouve un système échelonné, qui a une solution si, et seulement si, la dernière équation du système est satisfaite, c'est-à-dire  $c = 2b$  (on aurait aussi pu finir de résoudre le système, mais ce n'est pas demandé).

- (b) Le système précédent possède une solution si, et seulement si,  $(a, b, c) \in \text{Im } f$  (par définition de l'image).

On déduit donc que :

$$\text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid c = 2b \right\}$$

qui est bien un plan de  $\mathbb{R}^3$  (c'est le plan d'équation  $2b - c = 0$ ) et c'est d'ailleurs un hyperplan en tant que noyau de la forme linéaire non nulle  $(a, b, c) \mapsto 2b - c$ .

Pour une base, on résout le système (qui n'a qu'une équation) :

$$(a, b, c) \in \text{Im}f \Leftrightarrow 2b = c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Et ainsi  $\text{Im}f = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$  et la famille considérée est bien une base (génératrice par construction, et libre car constituée de **DEUX** vecteurs non colinéaires (des 0 à des places différentes)).

4. On déduit que  $f$  n'est ni injective (son noyau n'est pas réduit à  $\{0\}$ ), ni surjective (son image est un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$  et par  $\mathbb{R}^3$  entier), donc pas bijective.
5. Le noyau de  $f$  est la droite engendrée par  $(1, 1, 1)$ . Comme  $(1, 1, 1) \notin \text{Im}f$  (car  $2 \cdot 1 - 1 \neq 0$ ), on déduit que  $\text{Ker}f$  est une droite qui n'est pas contenue dans l'hyperplan  $\text{Im}f$  : ces deux espaces sont donc supplémentaires.
6. (a) On a directement :

$$(f - \text{id})(x, y, z) = (2x - 2y - z, x - 2y, 2x - 2y - z)$$

puis en réinjectant :

$$(f - \text{id})^2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(2x - 2y - z) - 2(x - 2y) - (2x - 2y - z) \\ (2x - 2y - z) - 2(x - 2y) \\ 2(2x - 2y - z) - 2(x - 2y) - (2x - 2y - z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - z \\ 2y - z \\ 2y - z \end{pmatrix} = (2y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) On directement, par définition du noyau :

$$\text{Ker}((f - \text{id})^2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - z = 0 \right\} = \text{Im}f$$

et de même pour l'image :

$$\text{Im}((f - \text{id})^2) = \left\{ (2y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Ker}f$$

Et on aurait aussi pu traiter par double inclusion, mais c'était plus long.

7. Notons déjà que, par formule du binôme (comme  $f$  et  $\text{id}$  commutent) :

$$(f - \text{id})^2 = f^2 - 2f + \text{id}$$

et en réinjectant dans les deux expressions, qu'on développe par bilinéarité de la composition :

$$f \circ (f - \text{id})^2 = f^3 - 2f^2 + f = (f - \text{id})^2 \circ f$$

ce qui prouve la première égalité.

On propose deux méthodes pour la suite :

- de manière directe avec la question précédente : pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on a  $f(x, y, z) \in \text{Im}f \subset \text{Ker}((f - \text{id})^2)$  et ainsi :

$$(f - \text{id})^2 \circ f(x, y, z) = (f - \text{id})^2(f(x, y, z)) = 0$$

(ou on pouvait utiliser l'autre égalité pour prouver que  $f \circ (f - \text{id})^2 = 0$ ) ;

- en suivant plutôt l'indication et les deux questions précédentes : soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On note  $(x, y, z) = u + v$  pour  $u \in \text{Im}f = \text{Ker}((f - \text{id})^2)$  et  $v \in \text{Ker}(f)$ . De sorte que :

$$(f - \text{id})^2 \circ f(x, y, z) = (f - \text{id})^2 \circ f(u) + (f - \text{id})^2 \circ f(v) = f \circ (f - \text{id})^2(u) + (f - \text{id})^2 \circ f(v) = 0 + 0 = 0$$

ce qui prouve bien que  $(f - \text{id})^2 \circ f$ .

8. On a alors, comme ci-dessus :  $g \circ (g - \text{id})^2 = (g - \text{id})^2 \circ g = 0$ , ce qui assure directement les inclusions :

$$\text{Im}(g) \subset \text{Ker}((g - \text{id})^2), \text{Im}((g - \text{id})^2) \subset \text{Ker}(g)$$

(clair en appliquant les égalités vérifiées par  $g$ ).

Pour les inclusions réciproques :

- si  $x \in \text{Ker}(g)$  :  $g(x) = 0$  donc  $(g - \text{id})^2(x) = (g^2 - 2g + \text{id})(x) = x$  donc  $x = (g - \text{id})^2(x) \in \text{Im}((g - \text{id})^2)$  ;
- si  $x \in \text{Ker}((g - \text{id})^2)$  :  $(g^2 - 2g + \text{id})(x) = 0$  donc  $x = 2g(x) - g^2(x) = g(2x - g(x)) \in \text{Im}g$  ;

ce qui prouve les inclusions réciproques.

Pour les supplémentaires, on procède par analyse-synthèse : soit  $x \in E$  :

- analyse : supposons que  $x$  s'écrit  $x = y + z$  pour  $y \in \text{Ker}(g)$  et  $z \in \text{Ker}((g - \text{id})^2)$ . Alors en appliquant  $(g - \text{id})^2$ , on déduit :

$$((g - \text{id})^2)(x) = (g^2(x) - 2g(x) + x) = ((g - \text{id})^2)(y) + ((g - \text{id})^2)(z) = y + 0 = y$$

ce qui donne  $y = g^2(x) - 2g(x) + x$  et  $z = x - y = -g^2(x) + 2g(x)$ .

Ceci assure, sous réserve d'existence, l'unicité d'une telle écriture.

- synthèse : posons  $y = g^2(x) - 2g(x) + x$  et  $z = x - y = -g^2(x) + 2g(x)$ . Alors :
  - $x = y + z$  (clair) ;
  - $y \in \text{Im}((g - \text{id})^2) = \text{Ker}(g)$  (en prenant l'expression de  $y$  pour l'appartenance, et le début de la question pour l'égalité ensembliste), donc on a bien  $y \in \text{Ker}g$  ;
  - $z \in \text{Im}(g) = \text{Ker}((g - \text{id})^2)$  (en prenant l'expression de  $z$  pour l'appartenance, et le début de la question pour l'égalité ensembliste), donc on a bien  $z \in \text{Ker}((g - \text{id})^2)$ .

Ce qui assure l'existence.

Et finalement,  $\text{Ker}(g)$  et  $\text{Ker}((g - \text{id})^2)$  sont des sous-espaces de  $E$  tels que tout élément de  $E$  s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de chaque espace : ils sont bien supplémentaires.

De l'expression de  $y$  et  $z$ , on déduit que ces projecteurs sont respectivement :

$$(g - \text{id})^2 \text{ et } g(2\text{id} - g).$$

### Exercice 3 [Analyse probabiliste d'un tirage]

- (a) Il y a 2 boules au départ :

- après le tirage 1 (sans remise) : il reste 1 boule.
- après le tirage 2 (avec remise) : il y a 1 boule.
- après le tirage 3 (sans remise) : il n'y en a plus.

Et donc il y a trois tirages en tout.

- (b) Si la boule noire est tirée au premier tirage, qui est sans remise, l'urne ne contient plus de boule noire. Les deux tirages suivants donnent des boules blanches.
- (c) Si on tire la boule blanche, il ne reste que des boules noires, et les deux derniers tirages ne donnent que des boules noires.

On a deux situations :

- si  $X_1 = 1$  : ce qui se fait avec probabilité  $1/2$  (les boules sont indiscernables), et alors  $X_2 = X_3 = 0$  et  $X = 1$  ;
- si  $X_1 = 0$  : ce qui se fait avec probabilité  $1/2$  (même argument), et alors  $X_2 = X_3 = 1$  et  $X = 2$ .

Par formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements  $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ , on déduit les lois demandées :

- $X_1, X_2$  et  $X_3$  ont même loi : ils prennent pour valeurs 1 et 0, avec  $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$  pour tout  $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$  ;
- $X$  prend les valeurs 1 ou 2, avec :  $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}$ .

2. Si on veut épuiser le nombre  $n$  de boules, il faut  $n$  tirages sans remise. On veut donc savoir jusqu'où compter pour avoir  $n$  nombres impairs : il y a donc  $N = 2n - 1$  tirages.

Plus précisément :

- avant le tirage  $2j$  : il y a  $n - j$  boules (car  $j$  tirages sans remise ont été faits) ;
- Avant le tirage  $2j + 1$  : toujours  $n - j$  boules (le tirage  $2j$  sa fait avec remise).

3. Dans l'état initial, il y a  $n$  boules indiscernables, parmi lesquelles une seule noire, et donc :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{n} \text{ et } \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{n-1}{n}$$

On détermine  $\mathbb{P}(X_2 = 1)$  par formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements  $((X_1 = 1), (X_1 = 0))$  :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1)$$

et on utilise que :

- si  $X_1 = 1$  : il n'y a plus de boule noire donc  $\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) = 0$  ;
- si  $X_1 = 0$  : au tirage il y a une boule noire pour  $n - 1$  boules en tout, donc  $\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{1}{n-1}$ .

Et finalement :  $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{n}$ .

Donc  $X_1$  et  $X_2$  suivent la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{n}$ .

4. (a) Il n'est plus possible de tirer la boule noire si elle a déjà été tirée à un tirage impair précédent.

(b) On déduit que, si  $X_{2j+1} = 1$ , alors  $X_1 = X_3 = \dots = X_{2j-1} = 0$ .

Ainsi, on a l'inclusion :

$$(X_{2j+1} = 1) \subset ((X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap \dots \cap (X_{2j-1} = 0))$$

ce qui prouve l'intersection demandée en, en faisant l'intersection avec  $(X_{2j+1} = 1)$ , et en utilisant que :

$$A \subset B \Rightarrow A = A \cap B.$$

(qui est même une équivalence).

Par formule des probabilités composées, on a alors :

$$\mathbb{P}(X_{2j+1} = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}_{X_1=0}(X_3 = 0) \cdot \mathbb{P}_{X_1=X_3=0}(X_5 = 0) \dots \mathbb{P}_{X_1=X_3=\dots=X_{2j-1}=0}(X_{2j+1}=1)$$

qu'on détermine par dénombrement :

- pour les premiers produits : à chaque tirage, on a une seule boule noire (comme les tirages sans remise ont donné une boule blanche) ; on a successivement  $n, n-1, \dots, n-j+1$  boules en tout ; et on veut tirer l'une des  $n-1, n-2, \dots, n-j$  boules blanches ;
- pour le dernier tirage : on a une boule noire, qu'on veut tirer, parmi  $n-j$  boules en tout.

Comme les boules sont indiscernables, on trouve finalement :

$$\mathbb{P}(X_{2j+1} = 1) = \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \dots \frac{n-j}{n-j+1} \frac{1}{n-j} = \frac{1}{n}.$$

(c) Pour  $X_{2j}$ , on a la même situation : si on veut tirer la boule noire, c'est qu'elle n'a pas été tirée lors d'un tirage pair précédent. On déduit ainsi :

$$(X_{2j} = 1) = (X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap \dots \cap (X_{2j-1} = 0) \cap (X_{2j} = 1)$$

puis par probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{2j} = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}_{X_1=0}(X_3 = 0) \cdot \mathbb{P}_{X_1=X_3=0}(X_5 = 0) \dots \mathbb{P}_{X_1=X_3=\dots=X_{2j-1}=0}(X_{2j} = 1) \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \dots \frac{n-j}{n-j+1} \frac{1}{n-j} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

car les situations à chaque étape sont exactement les mêmes.

**Remarque :** on pouvait y aller au bluff et mettre en évidence que toutes les boules ont un rôle parfaitement symétrique, et donc par équiprobabilité le fait de tirer la boule noire ou une autre est la même, d'où le  $\frac{1}{n}$ , mais on n'est pas comme ça.

5. On a donc pour tout  $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$  :  $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{n}$ .

Et comme  $X_k$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , alors les  $X_k$  suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{n}$ .

6. Au  $(2n-2)$ ème tirage, l'urne ne contient qu'une seule boule, qu'on tire nécessairement. On aura donc tiré, après le  $(2n-2)$ -ème tirage, au moins une fois chaque boule. Donc la boule noire ne peut pas être tirée pour le première fois au tirage  $(2n-1)$ , donc  $\mathbb{P}(U_n) = 0$ .

7. On procède comme précédemment, en utilisant que :

$$U_j = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \dots \cap (X_{2j-2} = 0) \cap (X_{2j-1} = 1)$$

et par formules des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(U_j) = \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{n-j+1}{n-j-2} \frac{n-j+1}{n-j+2} \frac{n-j}{n-j+1} \frac{1}{n-j+1} = \frac{n-j}{n(n-1)}$$

8. L'événement  $(X = 1)$  est l'union disjointe de  $U_j$  : si on ne tire qu'une seule fois la boule noire, c'est qu'on l'a tirée pour la première fois à un tirage impair. Et par union disjointe :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(U_j) = \sum_{j=1}^n \frac{n-j}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{n(n-1+0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

9. Si la boule noire est tirée  $n$  fois, cela veut dire qu'elle est tirée lors de  $(n-1)$  tirages pairs, puis d'un tirage impair suivant. Mais il n'y a que  $(n-1)$  tirages pairs, et donc cela veut dire que la boule noire est tirée à tous les tirages pairs, et au dernier. Et ainsi :

$$(X = n) = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0) \cap (X_4 = 1) \cap \dots \cap (X_{2n-2} = 1) \cap (X_{2n-1} = 1)$$

et par formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n) &= \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \frac{n-2}{n-1} \frac{1}{n-2} \frac{n-3}{n-2} \frac{1}{n-3} \dots \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n-2} \dots \frac{1}{2} \frac{1}{1} = \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

ce qui prouve bien le résultat.

## II Problème : Méthode de Newton

- Comme  $f$  est  $\mathcal{C}^2$ , elle est donc  $\mathcal{C}^1$  donc  $f'$  est continue. On a supposé que  $f'$  ne s'annule pas sur le segment  $[a; b]$  : par contraposée du théorème des valeurs intermédiaires,  $f'$  est donc de signe constant. Comme de plus  $f'(a) < 0$ , cela veut dire que  $f'$  est strictement négative sur  $[a; b]$ .
- Par hypothèse, la fonction est dérivable (car  $\mathcal{C}^2$ ) et de dérivée strictement négative sur  $[a, b]$ , donc  $f$  est strictement décroissante et continue sur  $[a, b]$ . Par théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection strictement décroissante de  $[a; b]$  dans  $[f(b); f(a)]$  (les bornes s'inversent par décroissance).  
Comme de plus  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$ , l'équation  $f(x) = 0$  a donc une unique solution dans  $[a, b]$ , qui ne peut être ni  $a$  ni  $b$  par hypothèse. D'où le résultat.
- Ladite tangente a pour équation  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ . L'abscisse  $\beta$  du point d'intersection de l'axe des abscisses et de cette tangente vérifie donc l'équation  $f'(x_0)(\beta - x_0) + f(x_0) = 0$ , donc  $\beta = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ .
- La convexité de  $f$  assure que  $f'$  est croissante, et que  $f'' \geq 0$  (on n'a pas d'inégalité stricte a priori).
  - Une fonction convexe étant au dessus de ses tangentes, on déduit que cette ordonnée est plus petite que  $f(\alpha) = 0$ , donc est négative ou nulle.
  - On montre séparément que  $\beta > a$  et que  $\beta \leq \alpha$  :
    - comme  $\beta = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$  avec  $f(a) > 0$  et  $f'(a) < 0$ , on a  $\frac{f(a)}{f'(a)} < 0$  puis en réinjectant  $\beta > a$  ;
    - avec la question précédente, le point sur la tangente d'abscisse  $\alpha$  a une ordonnée négative ou nulle. Comme cette tangente est de pente  $f'(a) < 0$ , cela veut dire qu'elle coupe l'axe des abscisses avant  $\alpha$ , c'est-à-dire que  $\beta \leq \alpha$ .

(d) Si  $x_0 = b$ , on retrouve une pente de tangente négative (comme  $f' < 0$ ) et la convexité assurée à nouveau que  $\beta \leq \alpha$ . En revanche, on n'a pas nécessairement  $\beta \in [a; b]$  : pour  $f : x \mapsto x^2 - 1$  sur  $[-2; -10^{-37}]$ , qui vérifie bien les hypothèses, la tangente en  $b = -10^{-37}$  est presque horizontale, et coupera l'axe des abscisses en  $\beta = -10^{-37} - \frac{-10^{-74} - 1}{2 \cdot -10^{-37}} \simeq -\frac{10^{37}}{2} < -2$ .

5. Il manquait une question 5 dans l'énoncé, il n'en manque pas dans le corrigé...

6.  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en tant que différence et quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas (en effet,  $f$  étant  $\mathcal{C}^2$ ,  $f'$  est  $\mathcal{C}^1$ ). Par ailleurs, pour tout  $x \in [a, b]$  :

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Notamment,  $g(\alpha) = \alpha$  et  $g'(\alpha) = 0$ .

7. Les fonctions  $f'$  et  $f''$  sont continues sur le segment  $[a, b]$  (comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ), donc par théorème des bornes atteintes elles sont bornées et atteignent leurs bornes. Par ailleurs,  $f'$  est à valeurs strictement négatives sur  $[a, b]$ , donc  $|f'|$  est à valeurs strictement positives. On en déduit l'existence des deux réels cherchés (qui sont bien strictement positives comme ces bornes sont atteintes).

8. Par le même argument,  $f'$  est continue sur  $[a, b]$  donc  $y$  est bornée. Soit  $L > 0$  tel que pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $|f'(t)| \leq L$ . Alors, par inégalité des accroissements finis, on a bien :  $\forall t \in [a, b]$ ,  $|f(t) - f(\alpha)| = |f'(t)| \leq L|t - \alpha|$ .

9. Soit  $x \in [a, b]$ . Pour tout  $t \in [a, b]$ , on a  $|g'(t)| = \frac{|f(t)||f''(t)|}{|f'(t)|^2}$ , et on sait que  $|f''(t)| \leq M$  et  $\frac{1}{|f'(t)|^2} \leq \frac{1}{m^2}$ . D'après la question précédente, on en déduit donc la majoration :  $|g'(t)| \leq \frac{ML}{m^2}|t - \alpha|$ .

Supposons maintenant  $x < \alpha$  et choisissons  $t \in [x, \alpha]$ . On a notamment  $|t - \alpha| < |x - \alpha|$  donc  $|g'(t)| \leq \frac{ML}{m^2}|x - \alpha|$ . Par inégalité des accroissements finis appliquée à  $g$  entre  $x$  et  $\alpha$  :  $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{ML}{m^2}|x - \alpha|(\alpha - x)$ . Puisque enfin  $g(\alpha) = \alpha$ , on a donc :

$$|g(x) - \alpha| \leq \frac{ML}{m^2}|x - \alpha|^2$$

On procède de même pour  $x > \alpha$ . Pour  $x = \alpha$ , l'inégalité est directe (c'est  $0 \leq 0$ ).

10. Il suffit de prendre  $h$  tel que  $Kh < 1$  (donc  $h < \frac{1}{K}$ ), et tel que  $J \subset [a, b]$ . Puisque  $\alpha \in ]a, b[$ , en posant  $\varepsilon = \min(\frac{\alpha-a}{2}, \frac{b-\alpha}{2})$  et  $h = \min(\frac{1}{K+1}, \varepsilon)$ , on a ce qu'on veut.

11. On a, pour  $x \in I \subset [a, b]$ ,  $|g(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|^2$  d'après la question 6. De plus  $|x - \alpha| \leq h$ , donc  $|g(x) - \alpha| \leq Kh \times h < h$  car  $Kh < 1$ . Donc  $g(x) \in ]\alpha - h, \alpha + h[ \subset J$ .

12. Puisque  $x_0 \in J$  et puisque  $J$  est stable par  $g$  (par la question précédente), l'existence et l'unicité de la suite  $(x_n)$  en découle.

13. Par récurrence, assez directe d'après l'inégalité établie en question 9.

14. Par encadrement, le résultat en découle.

15. On a d'abord  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $f(1) > 0$ ,  $f(3) < 0$  et  $f'$  strictement négative sur  $[1, 3]$ , on peut donc bien appliquer ce qui précède à  $f$ . Ici,  $\alpha = \sqrt{3}$  et on peut choisir  $m = 2$ ,  $L = 6$  et  $M = 2$  (par simples calculs sur les dérivées première et seconde de  $f$ ). Donc  $K = 3$ . En posant  $h = 0,3$ , on a bien  $Kh < 1$  et  $[\alpha - h, \alpha + h] \subset [1, 3]$ .

16. On a  $2 \in [\sqrt{3} - h, \sqrt{3} + h]$ , donc d'après ce qui précède, la suite est bien définie.

17. C'est un cas particulier de la question 13 dans ce cas.
18. Il suffit de choisir  $N$  tel que  $\frac{1}{3}(0,9)^{2^N} \leq 10^{-100}$ . Une application numérique montre que  $N = 12$  convient.
19. La méthode de dichotomie coupant à chaque fois l'intervalle en deux, il s'agit de trouver un entier  $N'$  tel que  $\frac{1}{2^{N'}} \leq 10^{-100}$ . Cette fois,  $N' = 334$  convient, ce qui semble montrer que la méthode de Newton est bien plus efficace. En pratique, c'est le cas et la méthode de Newton est encore à la base de tout un tas d'applications pratiques en ingénierie et ailleurs...