

DM n°9

I Exercices

Exercice 1 [Calculs de développements limités]

Donner les développements limités suivants, aux ordres demandés et en les points considérés :

1. * $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0 ;
2. * $\cos(x) - \sin(x)$ à l'ordre 5 en 0 ;
3. * $\sqrt{1+x} \cdot (\ln(1+x) - x)$ à l'ordre 4 en 0 ;
4. * $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 3 ;
5. * $\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ à l'ordre 2 en 0 ;
6. * $\frac{\exp(x) - 1 - x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 2 [Un peu d'algèbre linéaire]

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y - z \\ x - y \\ 2x - 2y \end{pmatrix}.$$

1. * Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. * Déterminer le noyau de f et en donner une base.
3. (a) Montrer que, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, l'équation $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ possède une solution si, et seulement si : $c = 2b$.
 (b) * En déduire que $\text{Im} f$ est un (hyper)plan de \mathbb{R}^3 , dont on donnera une équation ainsi qu'une base.
4. * Justifier si f est injective, surjective ou bijective.
5. * Montrer **très très très très très simplement en utilisant bien les résultats du cours** que $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
6. (a) * Exprimer, pour $x, y, z \in \mathbb{R}$: $(f - \text{id})(x, y, z)$ puis $(f - \text{id})^2(x, y, z)$.
 (b) En déduire que $\text{Im}(f) = \text{Ker}((f - \text{id})^2)$ et que $\text{Ker}(f) = \text{Im}((f - \text{id})^2)$
7. Justifier que $f \circ (f - \text{id})^2 = (f - \text{id})^2 \circ f$. Puis, à l'aide des deux questions précédentes, montrer **sans utiliser beaucoup de calculs** que $f \circ (f - \text{id})^2 = (f - \text{id})^2 \circ f = 0$.

Indication : on pourra s'intéresser à la restriction d'applications linéaire à des espaces supplémentaires.

8. Plus généralement, on considère E un espace vectoriel, et $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $g \circ (g - \text{id})^2 = 0$. Montrer que l'on a alors :

$$\text{Im}(g) = \text{Ker}((g - \text{id})^2), \quad \text{Ker}(g) = \text{Im}((g - \text{id})^2) \quad \text{et} \quad E = \text{Ker}((g - \text{id})^2) \oplus \text{Ker}(g)$$

et donner, à l'aide de g , l'expression des projections sur $\text{Ker}(g)$ parallèlement à $\text{Ker}((g - \text{id})^2)$ et sur $\text{Ker}((g - \text{id})^2)$ parallèlement à $\text{Ker}(g)$.

Exercice 3 [Des tirages dans une urne]

On considère une urne qui contient une boule noire et $(n - 1)$ boules blanches, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, toutes indiscernables. On vide complètement l'urne de manière en tirant successivement toutes les boules, une par une : le premier tirage se fait sans remise, le deuxième avec remise, le troisième sans remise, le quatrième avec remise, etc. Et donc on effectue des tirages jusqu'à vider toute l'urne, sachant que les tirages d'ordre impair se font sans remise, et ceux d'ordre pair avec remise.

On suppose que les tirages se font indépendamment.

On note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est tirée au k -ème tirage, et 0 sinon. On note X le nombre d'apparitions en tout de la boule noire lors des tirages.

1. * On suppose pour cette question uniquement que $n = 2$.
 - (a) Donner le nombre de boules dans l'urne après chaque tirage, et en déduire le nombre de tirages.
 - (b) On suppose que la boule noire est tirée au premier tirage : que penser des deux tirages suivants ?
 - (c) En adoptant un raisonnement analogue si on tire la boule blanche au premier tirage, en déduire la les lois de X_1, X_2, X_3 et X .
2. * Quel est le nombre total N de tirage ? Et plus précisément, pour $j \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, combien de boules reste-t-il avant le $(2j)$ -ème tirage ? Et avant le $(2j + 1)$ -ème tirage ?
3. * Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0)$. En déduire $\mathbb{P}(X_2 = 1)$ et reconnaître les lois de X_1 et X_2 .
4. Soit $j \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$.
 - (a) * À quelle condition n'est-il pas possible de tirer la boule noire lors des tirages numéro $2j$ et $2j + 1$?
 - (b) * En déduire que :

$$(X_{2j+1} = 1) = (X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap \dots \cap (X_{2j-1} = 0) \cap (X_{2j+1} = 1)$$

puis que $\mathbb{P}(X_{2j+1} = 1) = \frac{1}{n}$.

- (c) * Calculer de même la probabilité $\mathbb{P}(X_{2j} = 1)$.
5. En déduire la loi de toutes les variables X_k .

Pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note U_j l'événement : "on obtient la boule noire pour la 1-ère fois au $(2j - 1)$ -ème tirage".
6. Que penser de l'état de l'urne avant le $(2n - 2)$ -ème tirage ? En déduire que $\mathbb{P}(U_n) = 0$.
7. Montrer que : $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(U_j) = \frac{n - j}{n(n - 1)}$.
8. Exprimer l'événement $(X = 1)$ en fonction des U_j , et en déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 1)$.
9. Montrer que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!}$. On pourra commencer par exprimer (X_n) à l'aide des variables aléatoires X_k pour $k \in \llbracket 1; 2n - 1 \rrbracket$.

II Problème : méthode de Newton

On considère une application $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ telle que $f(a) > 0, f(b) < 0$. On suppose de plus que $f'(a) < 0$ et que f' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

1. * Montrer que f' est strictement négative sur $[a, b]$.
2. * Montrer que f réalise une bijection strictement décroissante de $[a, b]$ dans $]f(b), f(a)[$, et en déduire que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x admet une unique solution dans $]a, b[$. On notera cette solution α .
3. * Soit $x_0 \in [a, b]$. Déterminer l'abscisse β du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe de f en $(x_0, f(x_0))$.
4. On suppose pour cette question uniquement que f est convexe.
 - (a) * Que peut-on en déduire sur f' et f'' ?
 - (b) * Que peut-on dire sur l'ordonnée du point d'abscisse α de la tangente à la courbe de f en $(x_0, f(x_0))$?
 - (c) * En déduire que, si $x_0 = a$, alors $\beta \in]a, \alpha]$.
 - (d) Inversement, si l'on suppose $x_0 = b$, montrer que l'on a $\beta \leq \alpha$ mais que l'on n'a pas a priori $\beta \in [a, b]$.

Remarque : on prendra garde à ne pas appliquer f en des objets dont on n'a pas montré qu'ils sont dans $[a, b]$ (notamment β), et on donnera un contre-exemple explicite si l'on souhaite montrer qu'un résultat est faux (on pourra s'aider d'un dessin pour trouver le contre-exemple en question).

On introduit la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a, b], g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

6. * Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Calculer la dérivée de g sur $[a, b]$. Donner en particulier la valeur de $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
7. * Montrer qu'il existe deux réels m et M strictement positifs tels que :

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \geq m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M.$$

8. * Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que : $\forall t \in [a, b], |f(t)| \leq L|t - \alpha|$.
9. Soit $x \in [a, b]$. En utilisant le théorème des accroissements finis entre x et α , montrer que

$$|g(x) - \alpha| \leq \frac{M}{m^2} L |x - \alpha|^2$$

10. On note $K = \frac{ML}{m^2}$. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que, en notant $J = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait $Kh < 1$ et $J \subset [a, b]$.
11. * Montrer que : $\forall x \in J, g(x) \in J$.

On introduit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in J$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$.

12. * Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans J .

13. * À l'aide de la question 9, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leq \frac{1}{K} |K(x_0 - \alpha)|^{2^n}$$

14. * En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

On étudie maintenant un exemple d'une telle méthode de Newton pour obtenir une approximation de $\sqrt{3}$.
On considère donc $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3 - x^2$.

15. * En reprenant les notations de la question 10, montrer qu'on peut prendre $K = 3$ et $h = 0,3$. On notera que $1,7 < \sqrt{3} < 2$.

16. * En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$ est bien définie.

17. * Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{3} (0,9)^{2^n}$.

18. Combien d'itérations doit-on faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$ avec cette méthode ?

19. Si l'on avait utilisé une méthode de dichotomie, combien d'itérations aurait-on dû faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$?