

DM n°7

I Exercices

Exercice 1 [Familles libres et bases d'espaces vectoriels]

Pour cet exercice, lorsque l'on doit montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel **ET** en donner une base, l'écriture de l'ensemble comme $\text{Vect}(x_1, \dots)$ (avec (x_i) la famille dont on veut montrer que c'est une base) justifie la structure d'espace vectoriel. On pourrait dans chacun de ces cas commencer par montrer que les ensembles considérés sont des espaces vectoriels par caractérisation, mais c'est redondant avec la suite de l'exercice.

1. Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$(x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (-y, y, -t, t) \Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \text{Vect}((-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$$

et donc : $E = \text{Vect}((-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$, ce qui prouve bien que :

- c'est un espace vectoriel : c'est l'espace vectoriel engendré par la famille $((-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$;
 - la famille $((-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$ en est une base : elle est génératrice (par construction), et elle est libre (famille de deux vecteurs ne comportant pas des 0 au même endroit, donc clairement non proportionnels).
2. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \cos + \mu \sin + \nu \tan$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in]-\pi/2; \pi/2[, \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \nu \tan(x) = 0.$$

En évaluant en 0, on déduit $\lambda = 0$. Puis en évaluant en $\pi/3$ et $\pi/4$ on déduit :

$$\begin{cases} \lambda\sqrt{3}/2 + \mu\sqrt{3} = 0 \\ \lambda\sqrt{2}/2 + \mu = 0 \end{cases}$$

et donc (λ, μ) sont solution d'un système linéaire homogène inversible (son déterminant vaut $\sqrt{3}/2 - \sqrt{6}/2 \neq 0$), donc $\lambda = \mu = 0$.

Et finalement $\lambda = \mu = \nu = 0$: la famille est libre.

3. L'ensemble F est l'ensemble des suites linéaires récurrentes d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$. Donc :

$$F = \{(u_n) = (\lambda + \mu n) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

c'est-à-dire que F est l'ensemble des suites arithmétiques (le premier terme est λ et la raison est μ avec les notations précédentes) : ce n'était pas demandé, mais c'est joli de le remarquer.

On note $u = (1)$ (la suite constante de valeur 1) et $v = (n)$ (suite arithmétique de premier terme nul et de raison 1. Alors :

- $F = \text{Vect}(u, v)$, donc c'est un espace vectoriel ;
- (u, v) est une base de F : elle est génératrice (directement par description des éléments de F ; et elle est libre (u et v ne sont clairement pas proportionnels, en regardant le comportement en $+\infty$ par exemple).

4. On a directement, par résolution de l'équation $y'' = 3y' - 2y$ que :

$$G = \{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(f, g)$$

où $f : x \mapsto e^{2x}$ et $g : x \mapsto e^x$.

Comme avant, ceci assure que G est un espace vectoriel, et (f, g) en est une base : elle est génératrice par construction, et clairement libre (constituée de deux vecteurs non proportionnels).

5. Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

- avec $f = 0$ (la fonction nulle), on a : $f(\pi) = 0 = f''(37)$ donc $f \in H$; donc $0 \in H$;
- soient $f, g \in H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(\pi) = f''(37) \text{ et } g(\pi) = g''(37)$$

puis en posant $h = \lambda f + \mu g$, on a :

$$h(\pi) = \lambda f(\pi) + \mu g(\pi) = \lambda f''(37) + \mu g''(37) = h''(37)$$

donc $h \in H$. Donc H est stable par combinaisons linéaires.

Et finalement H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: c'est donc un espace vectoriel !

Exercice 2 [Étude d'une suite récurrente]

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

1. On a le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x+1}$	1	$+\infty$

Et pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x - \sqrt{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 \leq x+1$$

et donc $x - \sqrt{x+1}$ est du signe de :

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

qui est négatif pour $x \in]\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}[$ et positif sinon.

Comme $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, on déduit que $x - \sqrt{x+1}$ s'annule (en changeant de signe) seulement en $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ sur \mathbb{R}_+ , ce qui donne le tableau de signe suivant :

x	0	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$x - \sqrt{x+1}$	-	0	+

2. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
- pour $n = 0$: $u_0 \in \mathbb{R}_+$, ce qui prouve l'initialisation ;
 - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \in \mathbb{R}_+$$

ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

3. La suite (u_n) étant à valeurs dans \mathbb{R}_+ , et la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ étant croissante sur \mathbb{R}_+ , on déduit que la suite (u_n) est monotone. Sa monotonie est donnée suivant le signe de $u_0 - u_1 = u_0 - \sqrt{u_0 + 1}$, et plus précisément :

- si $u_0 \in [0; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}[$: alors (u_n) est strictement croissante ;
- si $u_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: alors (u_n) est constante ;
- si $u_0 > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: alors (u_n) est décroissante.

4. On a trois cas :

- si $u_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: alors (u_n) est constante, et converge vers $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$;
- si $u_0 > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: alors (u_n) est décroissante, et est minorée (par 0) donc converge. Sa limite ℓ est un point fixe de $x \mapsto \sqrt{x+1}$ (par continuité de cette fonction), et donc un point d'annulation sur \mathbb{R}_+ de $x \mapsto x - \sqrt{x+1}$. Donc elle converge vers $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$;
- si $u_0 < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: alors on par récurrence, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$:
 - pour $n = 0$: c'est vrai par hypothèse ;
 - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Alors en appliquant la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ (strictement croissante sur \mathbb{R}_+), on trouve :

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} < \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

Et finalement (u_n) est croissante, majorée (par $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$) donc converge vers ℓ . Et à nouveau par continuité de $x \mapsto \sqrt{x+1}$ on trouve que ℓ est un point fixe, donc $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Donc (u_n) converge vers $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Et finalement, peu importe la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}_+$, la suite (u_n) converge vers $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3 [Un étude d'ensemble de matrice]

On considère a, b, c trois réels tels que $b \neq 0$. On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note E l'ensemble des matrices qui commutent avec A , c'est-à-dire que $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid MA = AM\}$.

1. On a : $OA = O = AO$. Donc $O \in E$.

Soient $M, N \in E$ et $\lambda, \mu \in E$. Alors par bilinéarité du produit matriciel :

$$(\lambda M + \mu N)A = \lambda MA + \mu NA = \lambda AM + \mu AN = A(\lambda M + \mu N)$$

et donc $(\lambda M + \mu N) \in E$.

Et donc E est un espace vectoriel.

2. Les matrices A et I sont clairement non proportionnelles comme $b \neq 0$. Donc la famille (A, I) est libre.

On sait que $\text{Vect}(A, I)$ est le plus petit espace vectoriel contenant A et I . Pour montrer que $\text{Vect}(A, I) \subset E$, comme E est un espace vectoriel, il suffit de montrer que $A, I \in E$:

— pour A : $A \cdot A = A^2 = A \cdot A$ (on a inversé les deux A), donc $A \in E$;

— pour I : $A \cdot I = A = I \cdot A$ donc $I \in E$.

Et finalement $A, I \in E$, ce qui prouve bien que $\text{Vect}(A, I) \subset E$.

3. On pose pour cette question $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in E$.

(a) On calcule directement les produits matriciels. On a :

$$AM = \begin{pmatrix} a\alpha - b\gamma & a\beta - b\delta \\ b\alpha + c\gamma & b\beta + c\delta \end{pmatrix} \text{ et } MA = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b & -\alpha b + \beta c \\ \gamma a + \delta b & -\gamma b + \delta c \end{pmatrix}.$$

(b) Comme $M \in E$, alors $AM = MA$. En regardant les coefficients d'indice $(1, 1)$ et $(1, 2)$ de ces deux matrices, on déduit :

$$a\alpha - b\gamma = \alpha a + \beta b \text{ et } a\beta - b\delta = -\alpha b + \beta c$$

où la première égalité donne $\beta + \gamma = 0$ (en ramenant du même côté du signe "=", et en utilisant que $b \neq 0$). Et la seconde directement $a\beta + b\alpha = b\delta + c\beta$ (sans utiliser la non-nullité de b).

(c) On a directement :

$$bM + \beta A = \begin{pmatrix} \alpha b + \beta a & 0 \\ \gamma b + \beta b & b\delta + \beta c \end{pmatrix} = (\alpha b + \beta a)I$$

en utilisant les deux égalités précédentes. Ce qui prouve bien que $bM + \beta A \in \text{Vect}(I)$.

En notant $\lambda = \alpha b + \beta a$, on a ainsi :

$$M = \frac{1}{b}bM = \frac{-\beta}{b}A + \frac{\lambda}{b}I \in \text{Vect}(A, I)$$

ce qui prouve le résultat.

4. Et finalement (A, I) est bien une base de E :

— par la question 2 : on a montré que c'est une famille libre d'éléments de E ;

— par la question 3 : on a montré qu'elle est génératrice.

Et plus précisément, avec la dernière question, on a vu que pour un tel $M \in E$ on a :

$$M = \frac{-\beta}{b}A + \frac{\alpha b + \beta a}{b}I$$

ce qui donne les coordonnées dans cette base.

Exercice 4 [Étude d'une suite implicite] Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in]0, +\infty[, f_n(x) = nx + \ln(x).$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable (par combinaison linéaire) sur \mathbb{R}_+^* avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_n(x) = n + \frac{1}{x} > 0$$

ce qui prouve que la fonction f_n est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Par opération sur les limites (pas de forme indéterminée), on a directement les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

2. Pour n fixé, on a vu que les fonction f_n est strictement croissante, et tend vers $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes de \mathbb{R}_+^* . Comme la fonction f_n est continue, on déduit par théorème de la bijection monotone qu'elle réalise une bijection strictement croissante de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} : 0 possède donc un unique antécédent par f_n dans \mathbb{R}_+^* , ce qui veut bien dire que l'équation " $f_n(x) = 0$ " possède une unique solution x appartenant à $]0, +\infty[$.

3. On a directement :

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \ln(1/n) = 1 - \ln(n)$$

et, pour $n \geq 3$, on a : $\ln(n) \geq \ln(3) > \ln(e) = 1$. Donc pour un tel n : $f_n(n) < 0$.

Et ainsi : $f_n(1/n) < f_n(u_n)$. Par stricte croissance de f_n , on déduit que $\frac{1}{n} \leq u_n$ (et même une inégalité stricte).

De même, on a :

$$f_n(1) = n + \ln(1) = n > 0 = f_n(u_n)$$

et par stricte croissance de f_n , on a bien $u_n \leq 1$ (et c'est même une inégalité stricte).

4. Soit $n \geq 1$. On a par définition : $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire : $(n+1)u_{n+1} + \ln(u_{n+1}) = 0$. Et ainsi :

$$f_n(u_{n+1}) = nu_{n+1} + \ln(u_{n+1}) = -u_{n+1} < 0$$

et ainsi : $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$. Par stricte croissance de f_n , on déduit que $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est donc (strictement) décroissante.

5. La suite (u_n) est donc décroissance minorée (par 0) donc converge. Sa limite ℓ vérifie $\ell \geq 0$.

6. Par l'absurde, supposons que $\ell > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$nu_n + \ln(u_n) = 0$$

mais par passage à la limite :

— comme $\ell > 0$: $\lim nu_n = +\infty$ par produit ;

— par continuité de \ln : $\lim \ln(u_n) = \ln(\ell)$.

Et donc $+\infty = 0$, d'où la contradiction.

Et donc $\ell \leq 0$.

Comme on a déjà montré que $\ell \geq 0$, on déduit que $\ell = 0$.

7. (a) Par définition, pour tout $n \geq 1$ on a : $nu_n = -\ln(u_n)$ et cette quantité étant strictement positive, on peut appliquer la fonction \ln ce qui donne bien : $\ln(n) + \ln(u_n) = \ln(-\ln(u_n))$.

(b) Divisons cette égalité par $\ln(u_n) \neq 0$. On a alors pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln(n) + \ln(u_n)}{\ln(u_n)} - 1 = \frac{\ln(-\ln(u_n))}{\ln(u_n)} - 1$$

Mais on a vu que u_n tend vers 0^+ . Donc $\ln(u_n)$ tend vers $-\infty$. Et ainsi par composition :

$$\lim \frac{\ln(-\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{-x} = 0 \text{ par croissanceS comparéesS}$$

Ce qui donne bien la limite voulue, par somme.

- (c) On déduit ainsi que $\ln(u_n) \sim -\ln(n)$ (le quotient tend bien vers 1).
 (d) Et en utilisant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $nu_n = -\ln(u_n)$, on a finalement :

$$u_n = -\frac{\ln(u_n)}{n} \sim \frac{\ln(n)}{n}$$

qui tend bien vers 0 par valeurs positives, comme prouvé précédemment.

II Problème

Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. L'objectif est de calculer, par différentes manières, les puissances de M .

II.1 Première méthode

Considérons la matrice A définie par : $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.

1. On a directement :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A$$

2. On traite séparément les trois cas :

- pour $n = 0$: $M^0 = I_3 = I_3 + 0 \cdot A$ donc $u_0 = 0$ convient ;
- pour $n = 1$: $M^1 = M = I_3 + 4 \cdot A$ donc $u_1 = 4$ convient ;
- pour $n = 2$: $M^2 = (I_3 + 4A)^2 = I_3 + 16A^2 + 8A = I_3 - 8A$ (en utilisant le binôme, comme I_3 et A commutent, et que $A^2 = -A$) ; donc $u_2 = -8$ convient.

3. Procédons par récurrence :

- initialisation : le résultat a été montré pour $n = 0, 1, 2$;
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \in \mathbb{R}$ tels que $M^n = I_3 + u_n A$. Alors :

$$M^{n+1} = M \cdot M^n = (I_3 + 4A)(I_3 + u_n A) = I_3 + 4u_n A^2 + (4 + u_n)A = I_3 + \underbrace{(4 - 3u_n)}_{=u_{n+1}} A$$

en utilisant à nouveau que $A^2 = -A$. Donc $u_{n+1} = 4 - 3u_n$ convient, et on a bien l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

4. La famille (I_3, A) étant libre (les deux matrices n'ont pas des 0 au même endroit, donc sont clairement non proportionnelles), on déduit que toute combinaison linéaire en I_3 et A ne possède qu'une unique écriture de cette forme. Ceci assure directement, sous réserve d'existence, l'unicité de u_n .
5. La suite (u_n) vérifie :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -3u_n + 4$$

et c'est donc une suite arithmético-géométrique. Pour $l \in \mathbb{R}$, on a :

$$l = -3l + 4 \Leftrightarrow l = 1$$

ce qui assure que $(v_n) = (u_n - 1)$ est géométrique de raison -3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = -1$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -(-3)^n$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -(-3)^n + 1$$

On vérifie la formule pour $n = 0, 1, 2$: on retrouve bien les valeurs de u_0, u_1, u_2 .

6. Et finalement on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = I_3 + u_n A = \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-3)^n & 0 & -2 + 2 \cdot (-3)^n \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix}.$$

Et on vérifie : on a les bonnes valeurs pour $n = 0$ et $n = 1$.

II.2 Une deuxième méthode

On pose :

$$J = \frac{1}{4}(M + 3I_3).$$

7. On a directement :

$$J = J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = J$:

- pour $n = 1$: c'est vrai par définition ;
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^n = J$. Alors :

$$J^{n+1} = J^n J = J \cdot J = J^2 = J$$

d'où l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

Et finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n = 0 \\ J & \text{si } n \geq 1 \end{cases}.$$

Et cette formule est cohérente pour $n = 0, 1, 2$.

8. Par définition de J , on a : $M = 4J - 3I_3$. Les matrices $4J$ et $-3I_3$ commutent (cette dernière étant scalaire), on a directement par formule du binôme pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} M^n &= (4J - 3I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (4J)^k (-3I_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k \\ &= (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J \\ &= (-3)^n I_3 + ((4-3)^n - (-3)^n) J \\ &= (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J \end{aligned}$$

9. En remplaçant J par sa valeur, on déduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'égalité :

$$M^n = \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-3)^n & 0 & -2 + 2 \cdot (-3)^n \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix}.$$

et cette formule étant valable aussi pour $n = 0$ (elle donne I_3 , qui vaut bien M^0), on a bien la formule demandée.

II.3 Une dernière méthode

Pour cette dernière méthode, on pose :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une dernière méthode de calcul des puissances de M .

10. On procède par pivot. On trouve que P est inversible, avec :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(et on vérifie bien que $PP^{-1} = I_3$).

11. On a directement :

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(qui est diagonale, comme le laissait supposer son nom).

12. En tant que matrice diagonale, on a directement les puissances de D en passant à la puissance ses coefficients diagonaux :

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(la formule étant même valable pour $n \in \mathbb{Z}$ comme D est inversible, en constatant que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls).

13. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

en notant que les PP^{-1} qui apparaissent dans la puissance, écrite comme produits successifs, s'éliminent.

Et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M^n = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-3)^n & 0 & -2 + 2 \cdot (-3)^n \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix}$$

II.4 Une belle conclusion

14. Ici, il n'y a rien à faire si on suit la méthode du II.3 : la formule pour D^n étant valable pour $n \in \mathbb{Z}$, la formule finale est valable pour $n \in \mathbb{Z}$. Et cela a bien un sens car, la matrice D est inversible (on l'a dit avant) et :

$$M = PDP^{-1}$$

est un produit de matrices inversible, ce qui prouve l'inversibilité de M .

Autre méthode : soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-3)^n & 0 & -2 + 2 \cdot (-3)^n \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-3)^{-n} & 0 & -2 + 2 \cdot (-3)^{-n} \\ -(-3)^{-n} + 1 & 1 & -(-3)^{-n} + 1 \\ -(-3)^{-n} + 1 & 0 & -(-3)^{-n} + 2 \end{pmatrix} = I_3$$

mais la première matrice est M^n . On déduit donc l'inversibilité de M^n , et plus précisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M^{-n} = (M^n)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-3)^{-n} & 0 & -2 + 2 \cdot (-3)^{-n} \\ -(-3)^{-n} + 1 & 1 & -(-3)^{-n} + 1 \\ -(-3)^{-n} + 1 & 0 & -(-3)^{-n} + 2 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve bien que la formule précédente est valable aussi pour $n \in \mathbb{Z}$.