

DS n°6

I Limites, équivalents et suites

Exercice 1 Donner un équivalent et la limite éventuelle des fonctions suivantes en les points considérés :

1. en 0 :

$$(a) \frac{x^2 \cos(x)}{\tan(x) + \sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

$$(b) \frac{\ln(1+x)}{e^{2x^3} - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2x^3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} +\infty$$

$$(c) (2x^2 + 5x + 3)\ln(2+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3\ln(2) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 3\ln(2)$$

$$(d) x \cos(x) + \tan(x) \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

$$(e) \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) + x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \text{ qui n'a pas de limite en 0 (tend vers } +\infty \text{ en } 0^+ \text{ et } -\infty \text{ en } 0^-);$$

2. en 3 :

$$(a) (x+5)\ln(1+x^3) \underset{x \rightarrow 3}{\sim} 8\ln(28) \underset{x \rightarrow 3}{\rightarrow} 8\ln(28)$$

$$(b) \sqrt{x} - \sqrt{2} \underset{x \rightarrow 3}{\sim} \sqrt{3} - \sqrt{2} \underset{x \rightarrow 3}{\rightarrow} \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$(c) \text{ on pose } x = 3 + h : \sqrt{x} - \sqrt{3} = \sqrt{3+h} - \sqrt{3} = \sqrt{3} \left(\sqrt{1 + \frac{h}{3}} - 1 \right) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{3} \frac{1}{2} \frac{h}{3} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{6} h \underset{x \rightarrow 3}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{6} (x-3) \underset{x \rightarrow 3}{\rightarrow} 0$$

$$(d) \text{ pareil : } \frac{e^x - e^3}{x^2 - 9} = \frac{e^{3+h} - e^3}{6h + h^2} = \frac{e^3(e^h - 1)}{6h + h^2} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^3 h}{6h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^3}{6} \underset{x \rightarrow 3}{\sim} \frac{e^3}{6} \underset{x \rightarrow 3}{\rightarrow} \frac{e^3}{6}$$

$$(e) \text{ pareil : } (x^2 - 9)\ln(x^2 - 8) = (6h + h^2)\ln(1 + 6h + h^2) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 6h \cdot 6h \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 36h^2 \underset{x \rightarrow 3}{\sim} 36(x-3)^2$$

3. en $+\infty$:

$$(a) \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$$

$$(b) \frac{e^x + \ln(x) - 4}{x^2 + \ln(x) - \sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$$

$$(c) \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{2x} - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x} \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

$$(d) \frac{\ln(x^4 + 1)}{x^2 + 3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4\ln(x)}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

$$(e) \frac{xe^x + x^5 \ln(x) - e^x \ln(x)}{x^3 + \ln(x)e^x - \sqrt{x} \ln(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{xe^x}{\ln(x)e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$$

Exercice 2 Donner l'expression explicite de u_n pour les suites arithmético-géométriques (u_n) données par les premières valeurs et les relations de récurrences suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + 4$: formule vérifiée pour $u_1 = \frac{11}{2} = \frac{3}{2} + 4$;

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3$: formule vérifiée pour $u_1 = 3$;

3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 37 - 8$: formule vérifiée pour $u_1 = 5/4 = 37/4 - 8$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4n + 2$: formule vérifiée pour $u_1 = 6 = 4 \cdot 1 + 2$.

Exercice 3 1. $u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot (-3)^n$: formule vérifiée pour $u_2 = 75 = 3 \cdot 4 + 7 \cdot 9$

2. $u_n = (3 + 7n) \cdot (-2)^n$: formule vérifiée pour $u_2 = 68 = (3 + 14) \cdot 4$

3. $u_n = 2^n \cos(n\pi/3) - 2^n \sin(n\pi/3)$: formule vérifiée pour $u_2 = -2 - 2\sqrt{3}$.

II Matrices

Exercice 4

Pour chacune des matrices $A_i \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes, calculer A_i^2 , puis calculer A_i^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On vérifiera bien que la formule donnée pour $k \in \mathbb{N}$ est valable pour $k = 0, 1, 2$:

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} : A_1^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Puissances par binômes en écrivant $A_1 = 2I_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$ qui commutent

(matrice scalaire) avec $N^2 = 0$ donc N nilpotente et toutes puissances $N^k = 0$ pour $k \geq 2$. Et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_1^n = (2I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k = 2^n I_2 + n2^{n-1} N = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Formule juste pour $n = 0, 1, 2$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} : A_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Puissances par binômes en écrivant $A_2 = I_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=B}$ qui commutent

(matrice scalaire) avec $B^2 = B$ toutes puissances $B^k = B$ pour $k \geq 1$. Et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_2^n = (I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k = I_2 + (2^n - 1)B = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Formule juste pour $n = 0, 1, 2$.

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} : A_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot A_3$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_3^n = 2^{n-1} A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$:

- pour $n = 1$: $A_3^1 = A_3 = 2^0 A_3$ donc le résultat est vrai pour $n = 1$;
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_3^n = 2^{n-1} A_3$. Alors :

$$A_3^{n+1} = A_3^n \cdot A_3 = 2^{n-1} A_3 \cdot A_3 = 2^{n-1} A_3^2 = 2^n A_3 = 2^{(n+1)-1} A_3.$$

D'où le résultat par récurrence.

Formule juste pour $n = 1, 2$.

Et pour $n = 0$: $A_3^0 = I_2$.

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : A_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puissances par binômes en écrivant $A_4 = I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$

qui commutent (matrice scalaire) avec $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$ donc N nilpotente et toutes

puissances $N^k = 0$ pour $k \geq 3$. Et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_4^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formule juste pour $n = 0, 1, 2$.

$$5. A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} : A_5^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A_5. \text{ Par récurrence, on montre que pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

$$A_5^n = 3^{n-1}A_5 = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix} :$$

- pour $n = 1$: c'est vrai ;
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_5^n = 3^{n-1}A_5$. Alors :

$$A_5^{n+1} = A_5^n A_5 = 3^{n-1}A_5^2 = 3^n A_5 = 3^{(n+1)-1}A_5$$

ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

Formule juste pour $n = 1, 2$.

Et pour $n = 0$: $A_5^0 = I_3$.

Exercice 5

On procède à chaque fois par opérations sur les lignes : où bien on transforme P_i en I_3 (et elle est inversible et on a son inverse), ou on fait apparaître une ligne de 0 dans P_i : la ligne correspondante sur les transformations de I_3 donne un X (vecteur ligne) non nul tel que $XP = 0$. Ou parfois on voit les choses (mais c'est rare...).

$$1. P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ inversible d'inverse } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On vérifie que le produit donne } I_3 \text{ ce qui}$$

permet de vérifier les calculs, et prouve encore l'inversibilité.

$$2. P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} : \text{ pas inversible (deux lignes égales). On a } L1 + L3 = 0 \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P_2 =$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui vérifie la non inversibilité.

$$3. P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ inversible d'inverse } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ On vérifie que le produit donne } I_3 \text{ ce qui}$$

permet de vérifier les calculs, et prouve encore l'inversibilité.

$$4. P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} : \text{ pas inversible (deux lignes proportionnelles). On a : } 2L1 - L3 = 0 \text{ donc}$$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui vérifie la non inversibilité.

$$5. P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ inversible d'inverse } \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \text{ On vérifie que le produit donne } I_3 \text{ ce qui}$$

permet de vérifier les calculs, et prouve encore l'inversibilité.

$$6. P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} : \text{ pas inversible par opérations sur les lignes (là ça ne se voit pas tellement) ; on}$$

trouve $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui vérifie la non inversibilité.