

DM n°6

I Limites, équivalents et suites

Exercice 1 Donner un équivalent et la limite éventuelle des fonctions suivantes en les points considérés :

1. en 0 :

(a) $\frac{x^2 \cos(x)}{\tan(x) + \sin(x)}$

(b) $\frac{\ln(1+x)}{e^{2x^3} - 1}$

(c) $(2x^2 + 5x + 3)\ln(2+x)$

(d) $x \cos(x) + \tan(x) \sin(x)$

(e) $\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) + x^2}$

2. en 3 :

(a) $(x+5)\ln(1+x^3)$

(b) $\sqrt{x} - \sqrt{2}$

(c) $\sqrt{x} - \sqrt{3}$

(d) $\frac{e^x - e^3}{x^2 - 9}$

(e) $(x^2 - 9)\ln(x^2 - 8)$

3. en $+\infty$:

(a) $\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$

(b) $\frac{e^x + \ln(x) - 4}{x^2 + \ln(x) - \sqrt{x}}$

(c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

(d) $\frac{\ln(x^4 + 1)}{x^2 + 3}$

(e) $\frac{xe^x + x^5 \ln(x) - e^x \ln(x)}{x^3 + \ln(x)e^x - \sqrt{x} \ln(x)}$

Exercice 2 Donner l'expression explicite de u_n pour les suites arithmético-géométriques (u_n) données par les premières valeurs et les relations de récurrences suivantes. On calculera u_1 pour vérifier la formule.

1. $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 2$

2. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 9$

3. $u_0 = 29$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - 6$

4. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4$

Exercice 3 Donner l'expression explicite de u_n pour les suites (u_n) linéaires récurrentes d'ordre 2 données par les premières valeurs et les relations de récurrences suivantes. On veillera à ne pas utiliser l'exponentielle complexe pour exprimer les suites réelles, et on utilisera les fonctions circulaires à la place. On calculera u_2 pour vérifier la formule.

1. $u_0 = 10, u_1 = -15$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$
2. $u_0 = 3, u_1 = -20$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -4u_{n+1} - 4u_n$
3. $u_0 = 1, u_1 = 1 - \sqrt{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$

II Matrices

Exercice 4

Pour chacune des matrices $A_i \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes, calculer A_i^2 , puis calculer A_i^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On vérifiera bien que la formule donnée pour $k \in \mathbb{N}$ est valable pour $k = 0, 1, 2$:

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Dire si les matrices P_i suivantes sont inversibles et le prouver. En cas d'inversibilité, on donnera l'inverse de P . Que ce soit pour l'inversibilité ou la non inversibilité, on donnera un calcul qui permette de vérifier le résultat **EN LE FAISANT FIGURER LE CALCUL SUR LA COPIE** : on écrira par exemple le calcul du produit $P \cdot P^{-1}$ dans le cas inversible, et un vecteur X non nul tel que $PX = 0$ ou $XP = 0$ dans le cas non inversible.

1. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
3. $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
4. $P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
5. $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
6. $P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$