DM n^{o}5

Indications sur la notation :

- exercice 1 : 10
- exercice 2 : 5
- exercice 3 : 5
- exercice 4 : 24
- exercice 5 : 14
- exercice 6 : 10
- problème : 30

Total pour avoir 20/20 : 80

I Exercices

Exercice 1 Donner un équivalent et la limite des suites suivantes :

1. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$
2. $(n^2+1)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
3. $\dfrac{n^2+5n-2}{3n^3+2n-3}$
4. $\dfrac{e^{1/n}-1}{\ln(1+e^{-n})}$

Exercice 2 On considère l'application :

$$f : x \mapsto \frac{x-5}{2x-3}.$$

Donner des sous-ensembles E, F de $\mathbb{R}$ les plus grands possibles tels que f réalise une bijection de E dans F, et donner sa bijection réciproque.

Exercice 3 Soient E un ensemble non vide, et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow B = C.$$

Exercice 4 On considère E, F, G, H quatre ensembles (supposés non vides), et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective.
   (a) Quelle application, de f ou de g, est alors injective ?

   (b) Montrer que l'autre application n'est pas nécessairement injective.

2. On suppose que $g \circ f$ est surjective.
   (a) Quelle application, de f ou de g, est alors surjective ?
   (b) Montrer que l'autre application n'est pas nécessairement surjective.

3. (a) Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi.
   (b) Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi.
   (c) Montrer que si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ aussi.

4. À l'aide des questions précédentes, montrer que l'on a l'équivalence :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \Leftrightarrow (f, g, h \text{ sont bijectives}).$$

Exercice 5 On considère $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et on pose $a \notin \mathbb{U}$. On pose :

$$f : z \mapsto \frac{z+a}{1+\overline{a}z}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f, et vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{U}$.

2. Soit $z \in \mathbb{U}$.
   (a) Exprimez le plus simplement possible $\dfrac{1}{z}$ en fonction de $\overline{z}$.
   (b) En déduire que $f(z) \in \mathbb{U}$.

3. Soit $\omega \in \mathbb{U}$.
   (a) Résoudre l'équation $f(z) = \omega$.
   (b) Montrer que $\dfrac{\omega - a}{1 - \overline{a}\omega} \in \mathbb{U}$.

4. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$, et donner sa bijection réciproque.

Exercice 6 Soient E, F deux ensembles non-vides, et $f : E \to F$.

1. Montrer que :
$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A)).$$

2. Montrer que, dans l'assertion précédente, l'inclusion réciproque n'est en général pas vérifiée.

3. Montrer que f est injective si, et seulement si :
$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}(f(A)) \subset A.$$

II Problème

II.1 Analyse asymptotique des solutions d'une équation différentielle à coefficients constants

1. Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle: $z'' + z = 0$.
2. Pour deux réels A et B, déterminer un équivalent en 0 de la fonction $x \mapsto A\cos x + B\sin x$.
   Indication : on pourrait traiter séparément les cas où $A = 0$ et $A \neq 0$.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que la fonction

$$x \mapsto \frac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$$

   admette une limite finie en 0^+. Cette condition étant satisfaite, en donner un équivalent en 0^+.

II.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients variables

On considère dans cette question l'équation différentielle:

$$(E) : \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

dont on cherche les solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

4. Montrer que $\mathcal{S}$ est non-vide, et stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire que :

$$\forall f, g \in \mathcal{S},\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda f + \mu g \in \mathcal{S}.$$

5. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et soit z la fonction définie par:

$$z : \begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \cdot y(x) \end{array}$$

   (a) Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$, et exprimer z' et z'' à l'aide de y et de ses dérivées.

   (b) En déduire que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire (E') du second ordre **à coefficients constants**, que l'on donnera explicitement.

6. Résoudre l'équation différentielle (E') sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et en déduire les solutions de (E).
7. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E) qui possèdent une limite finie en 0. On écrira $\mathcal{S}_0$ sous la forme $\{\lambda f_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ pour f_0 une fonction que l'on donnera explicitement.
8. Les éléments de $\mathcal{S}_0$ sont-ils prolongeables par continuité en 0 ? Les prolongements éventuels sont-ils dérivables en 0 ?
9. Démontrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $]0, +\infty[$, notée f, telle que:

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$$