DM n^{o}3

Indications sur la notation :

- exercice 1 : 25
- exercice 2 : 13
- exercice 3 : 20
- problème : 25

Total pour avoir 20/20 : 65

I Exercices

Exercice 1 [Proche du cours]

1. Que valent $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ et $\arccos\left(\cos\left(\frac{23\pi}{6}\right)\right)$?

2. Déterminer les limites suivantes :

   (a) $3x^2 - e^{2x} + 2$ quand $x \to +\infty$

   (b) $\ln(t) - t + \sqrt{t}$ quand $t \to +\infty$

   (c) $\dfrac{u^3}{\cos^2(u)}$ quand $u \to 0$

   (d) $\dfrac{\ln(\ln t)}{\ln t}$ quand $t \to +\infty$

   (e) $\dfrac{\ln(1+t)}{\sin(t)}$ quand t tend vers 0

3. Dire pour quelle valeur(s) de x l'expression $\sin(\arccos(x))$ a un sens, et la simplifier. Faire de même pour l'expression $\sin(2\arccos(x))$.

4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1;1[$.

   (b) En déduire que la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

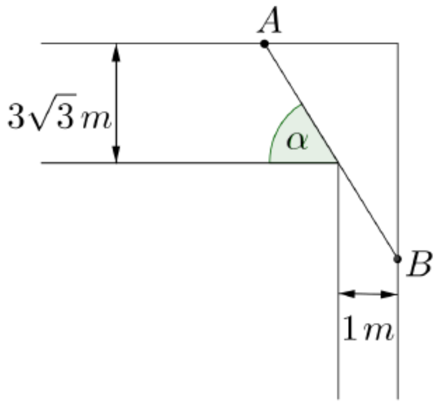
   (c) En reconnaissant une dérivée d'une fonction usuelle, donner une écriture simplifiée de f.

5. Résoudre en suivant la méthode du cours l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$2z^2 + (8-5i)z + 4 - 13i = 0$$

   On fera bien attention à justifier toutes les étapes.

Exercice 2 [Trigonométrie appliquée] Un couloir de musée de largeur $3\sqrt{3}$ mètres tourne à angle droit et sa largeur n'est plus que de 1 mètre. On veut transporter dans ce couloir un tableau en position verticale. L'objectif est de déterminer la largeur maximale possible du tableau que l'on peut ainsi déplacer dans le couloir.



1. Montrer que, avec les notations de la figure ci-dessus :

$$AB = \frac{3\sqrt{3}}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

   On pose $AB = f(\alpha)$. On se propose d'étudier la fonction f sur l'intervalle $I =]0, \frac{\pi}{2}[$.

2. Justifier que f est dérivable sur I puis calculer f'.

3. On veut déterminer le signe de f' sur I. Soit $\alpha \in I$.
   (a) Justifier que $f'(\alpha)$ est du signe de $\sin^3(\alpha) - 3\sqrt{3}\cos^3(\alpha)$.
   (b) Soient a et b des réels. Rappeler la factorisation de $a^3 - b^3$ par $a - b$.
   (c) En déduire que $f'(\alpha)$ est du signe de $\sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha)$.
   (d) En déduire le signe de f' sur I.
4. Dresser le tableau de variations de f sur I. Quelle est la largeur maximale du tableau que l'on peut transporter dans le couloir ?

Exercice 3 [Calcul de la tangente de $\frac{\pi}{5}$] On considère l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1+iz)^5 = (1-iz)^5 \tag{1}$$

1. (a) Résoudre l'équation $z^2 - 10z + 5 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   (b) Développer $(a+b)^5$.
   (c) En déduire une expression simplifiée de $(1+iz)^5 - (1-iz)^5$ puis une première résolution de (1).
2. (a) Rappeler (sans démonstration) l'expression des racines cinquièmes de l'unité sous forme trigonométriqu
   (b) Soit $\theta \in]-\pi;\pi]$. Simplifier l'écriture des complexes $e^{i\theta} - 1$ et $e^{i\theta} + 1$.
   (c) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Résoudre l'équation $\dfrac{1+iz}{1-iz} = \alpha$ d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.
   (d) Vérifier que $-i$ n'est pas solution de (1), puis déduire des trois questions précédentes une seconde résolution de (1), dont on exprimera les solutions à l'aide de $\tan(\pi/5)$ et $\tan(2\pi/5)$ si besoin.
3. En confrontant les résultats des questions précédentes, donner les tangentes de $\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{2\pi}{5}$. Vous mettrez vos résultats sous la forme $\sqrt{p + q\sqrt{n}}$ avec $p, q, n \in \mathbb{Z}$.
4. Calculer $\tan\dfrac{\pi}{10}$.

II Problème : Argument sinus hyperbolique

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction réciproque du sinus hyperbolique : *l'argument sinus hyperbolique*, puis d'établir dessus une relation fonctionnelle.

1. Rappeler (sans démonstration) la définition et le tableau de variations de la fonction sinus hyperbolique (on fera notamment apparaître les limites et les valeurs remarquables), ainsi que l'expression de sa dérivée.

2. Montrer que pour tout réel x, il existe un unique réel t vérifiant $\operatorname{sh}(t) = x$.

Dans ce cas, on notera dorénavant $t = \operatorname{Argsh}(x)$ (argument sinus hyperbolique de x).

3. Établir le tableau de variations de la fonction Argsh.

4. Montrer que la fonction Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x :

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

5. Montrer que, pour tout réel x :

$$\operatorname{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

On souhaite désormais prouver de trois manières différentes (et indépendantes) que, pour tout réel x :

$$\operatorname{Argsh}(2x\sqrt{1+x^2}) = 2\operatorname{Argsh}(x)$$

6. <u>Première méthode : par la trigonométrie hyperbolique</u>
   (a) Montrer que pour tout réel t :
   $$\operatorname{sh}(2t) = 2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)$$
   (b) Conclure quant à l'identité demandée.

7. <u>Deuxième méthode : par une étude analytique</u> On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Argsh}(2x\sqrt{1+x^2})$.
   (a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f. On notera $\mathcal{D}$ ce dernier domaine.
   (b) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $\mathcal{D}$.
   (c) Conclure quant à l'identité demandée.

8. <u>Troisième méthode : par la formule logarithmique de Argsh</u>
   Conclure quant à l'identité demandée en utilisant directement l'identité obtenue à la question 5.