

DM n^o2

I Sommes et sommes doubles

Exercice 1

1. Somme arithmétique de raison 3 : $\sum_{k=3}^{n-1} (3k - 1) = (n - 3) \cdot \frac{8 + 3n - 4}{2} = \frac{(n - 3)(3n + 4)}{2}$
2. Somme arithmétique de raison 1, ou linéarité (au choix) : $\sum_{k=0}^{n+1} k + n = (n + 2) \cdot \frac{n + 2n + 1}{2} = \frac{(n + 2)(3n + 1)}{2}$
3. Somme binomiale : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3} + 1\right)^n = \frac{5^n}{3^n}$
4. Somme géométrique de raison $3 \neq 1$: $\sum_{k=1}^{n+2} \frac{3^{k-1}}{2^4} = \frac{1}{16} \frac{1 - 3^{n+2}}{1 - 3} = \frac{3^{n+2} - 1}{32}$
5. Somme géométrique de raison $(1 - x)^3$: deux cas :
 - si $(1 - x)^3 = 1$ (c'est-à-dire $x = 0$) : $\sum_{k=2}^{n-1} (1 - x)^{3k} = \sum_{k=2}^{n-1} 1 = n - 2$;
 - si $(1 - x)^3 \neq 1$ (c'est-à-dire $x \neq 0$) : $\sum_{k=2}^{n-1} (1 - x)^{3k} = (1 - x)^6 \frac{1 - (1 - x)^{3n-6}}{1 - (1 - x)^3} = \frac{(1 - x)^6 - (1 - x)^{3n}}{1 - (1 - x)^3}$
6. Somme géométrique de raison $\frac{(x - 1)}{(x + 1)^{-1}} = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$:
 - si $x^2 - 1 = 1$ (c'est-à-dire $x = \pm\sqrt{2}$) : $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x - 1)^k}{(x + 1)^{-k}} = \sum_{k=0}^{n+1} 1 = n + 2$;
 - si $x^2 - 1 \neq 1$ (c'est-à-dire $x \neq \pm\sqrt{2}$) : $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x - 1)^k}{(x + 1)^{-k}} = \sum_{k=0}^{n+1} (x^2 - 1)^k = 1 \cdot \frac{1 - (x^2 - 1)^{n+2}}{1 - (x^2 - 1)} = \frac{(x^2 - 1)^{n+2} - 1}{x^2 - 2}$
7. Somme télescopique : $\sum_{k=1}^{n+2} (k + 1)^5 - k^5 = (n + 3)^5 - 1$
8. Somme télescopique : $\sum_{k=3}^{n-1} \cos(2k + 1) - \cos(2k - 1) = \cos(2n - 1) - \cos(5)$
9. Linéarité, et on se ramène à somme quadratique et arithmétique : $\sum_{k=0}^n (k + 3)^2 = \sum_{k=0}^n k^2 + 6k + 9 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + 3n(n + 1) + 9(n + 1) = \frac{(n + 1)}{6} ((n + 1)(2n + 1) + 18n + 54) = \frac{(n + 1)(2n^2 + 19n + 54)}{6}$

10. Binôme : $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^n \cdot n^k = 2^n \cdot ((n+1)^n - 1) = (2n+2)^n - 2^n$

11. Somme télescopique : $\sum_{k=1}^{n-3} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{n-3} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n-2) - \ln(1) = \ln(n-2)$

12. On calcule aussi la somme des termes de rangs impairs (comme dans le cours et suggéré par l'indication). On pose $A = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 4^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{2k}$ et $B = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1}$. Alors :

$$A + B = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} 2^l = 3^n \text{ et } A - B = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (-2)^l = (1-2)^n = (-1)^n$$

et finalement : $A = \frac{(A+B) + (A-B)}{2} = \frac{3^n + (-1)^n}{2}$ et $B = \frac{(A+B) - (A-B)}{2} = \frac{3^n - (-1)^n}{2}$.

13. On coupe la somme en deux suivant la parité de k , qu'on regroupe par linéarité : $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = \sum_{l=1}^n 2l - \sum_{l=1}^n (2l-1) = \sum_{l=1}^n 1 = n$

14. Idem : $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{l=1}^n (2l)^2 - \sum_{l=1}^n (2l-1)^2 = \sum_{l=1}^n (4l-1) = n \cdot \frac{3+4n-1}{2} = n(2n+1)$

15. On utilise la formule du capitaine puis un binôme : $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} n \binom{n-1}{l} = n 2^{n-1}$

16. On utilise deux fois la formule du capitaine et on fait apparaître un binôme : $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = \sum_{k=2}^n n(k-1) \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} = \sum_{l=0}^{n-2} n(n-1) \binom{n-2}{l} = n(n-1) 2^{n-2}$

17. On utilise la formule du capitaine dans l'autre sens et on fait apparaître un binôme : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{l=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{l} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

18. On a un télescopage sur deux indices : $\sum_{k=2}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k-1} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} - \sqrt{1}$

19. On développe et on reconnaît par linéarité des sommes cubique, quadratique et arithmétique : $\sum_{k=0}^n k(k+1)(k+2) = \sum_{k=0}^n k^3 + 3k^2 + 2k = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1) = \frac{n(n+1)}{4} (n(n+1) + (4n^2 + 6n + 6))$

$$\frac{n(n+1)(n^2 + 5n + 6)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Exercice 2

1. $\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} k + l :$

Pour $n = 1$, on trouve : 2.

Formule générale : $\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} k + l = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l (k + l) = \sum_{l=1}^n \frac{l(l+1+2l)}{2} = \sum_{l=1}^n \frac{3l^2 + l}{2} = \frac{3}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4} (2n+1+1) = \frac{n(n+1)^2}{2}$

Bonne valeur pour $n = 1$.

2. $\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} 2k$

Pour $n = 1$, on trouve : 2

Formule générale : $\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} 2k = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l 2k = \sum_{l=1}^n l(l+1) = \sum_{l=1}^n l^2 + l = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} (2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Bonne valeur pour $n = 2$.

3. $\sum_{1 \leq k < l \leq n} kl$

Pour $n = 1$, on trouve : 0 (somme vide)

Formule générale : $\sum_{1 \leq k < l \leq n} kl = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{l-1} kl = \sum_{l=1}^n (l-1) \frac{l+l^2-l}{2} = \sum_{l=1}^n \frac{l^3 - l^2}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{8} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)}{24} (3n(n+1) - 2(2n+1)) = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24} = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$

Bonne valeur pour $n = 1$.

4. $\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \frac{k}{l}$

Pour $n = 1$, on trouve : 1

Formule générale : $\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \frac{k}{l} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l \frac{k}{l} = \sum_{l=1}^n \sum_{l(l+1)} 2l = \sum_{l=1}^n \frac{l+1}{2} = n \frac{1 + \frac{n+1}{2}}{2} = \frac{2n + n(n+1)}{4} = \frac{n(n+3)}{4}$

Bonne valeur pour $n = 1$.

5. $\sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \binom{l}{k} 2^l$

Pour $n = 1$, on trouve : $\binom{0}{0} 2^0 + \binom{1}{0} 2^1 + \binom{1}{1} 2^1 = 1 + 2 + 2 = 5$.

Formule générale : $\sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \binom{l}{k} 2^l = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} 2^l = \sum_{l=0}^n 2^l 2^l = \sum_{l=0}^n 4^l = 1 \cdot \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$.

Bonne valeur pour $n = 1$.

$$6. \sum_{0 \leq k, l \leq n} \binom{n+1}{k} l^k$$

Pour $n = 1$, on trouve : $\binom{2}{0}0^0 + \binom{2}{0}1^0 + \binom{2}{1}0^1 + \binom{2}{1}1^1 = 1 + 1 + 0 + 2 = 4$.

$$\text{Formule générale : } \sum_{0 \leq k, l \leq n} \binom{n+1}{k} l^k = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} l^k = \sum_{l=0}^n ((l+1)^{n+1} - l^{n+1}) = (n+1)^{n+1}$$

Bonne valeur pour $n = 1$.

$$7. \sum_{k=0}^n k \cdot 3^k$$

Pour $n = 1$, on trouve : 3

$$\text{Formule générale : } \sum_{k=0}^n k \cdot 3^k = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{k-1} 3^k = \sum_{l=0}^n \sum_{k=l+1}^n 3^k = \sum_{l=0}^n 3^{l+1} \frac{3^{n-l} - 1}{3 - 1} = \sum_{l=0}^n \frac{3^{n+1} - 3^{l+1}}{2} =$$

$$\frac{n+1}{2} 3^{n+1} - \frac{3}{2} \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{2n-1}{4} 3^{n+1} + \frac{3}{4}$$

Bonne valeur pour $n = 1$.

$$8. \sum_{0 \leq k, l \leq n} \min(k, l)$$

Pour $n = 1$, on trouve : $0 + 0 + 0 + 1 = 1$.

$$\text{Formule générale : } \sum_{0 \leq k, l \leq n} \min(k, l) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \min(k, l) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=0}^k \min(k, l) + \sum_{l=k+1}^n \min(k, l) \right) =$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=0}^k l + \sum_{l=k+1}^n k \right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k(k+1)}{2} + k(n-k) \right) = \sum_{k=0}^n \frac{2n+1}{2} k - \frac{k^2}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} -$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bonne valeur pour $n = 1$

$$9. \sum_{0 \leq k, l \leq n} |k - l|$$

Pour $n = 1$, on trouve : $0 + 1 + 1 + 0 = 2$.

$$\text{Formule générale : } \sum_{0 \leq k, l \leq n} |k - l| = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n |k - l| = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=0}^k |k - l| + \sum_{l=k+1}^n |k - l| \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=0}^k (k - l) + \sum_{l=k+1}^n (l - k) \right) =$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} = \sum_{k=0}^n k^2 - nk + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)}{2} +$$

$$\frac{n(n+1)^2}{2} = \frac{n(n+1)}{6} (2n+1 - 3n + 3n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Bonne valeur pour $n = 1$.

II Produits

Exercice 3

$$1. \prod_{k=1}^{n+1} 5k = 5^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k = 5^{n+1} (n+1)!$$

$$2. \prod_{k=2}^{n-1} 2k^2 = 2^{n-2} \left(\prod_{k=2}^{n-1} k \right)^2 = 2^{n-2} ((n-1)!)^2$$

$$3. \prod_{k=1}^n (2k+1) = \frac{\prod_{l=1}^{2n+1} l}{\prod_{k=1}^n 2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n (n!)}$$

$$4. \prod_{k=1}^n 3^{3k+1} = 3^{k=1} \sum_{k=1}^n 3k + 1 = 3 \frac{n(3n+5)}{2}$$

$$5. \prod_{k=1}^n 3^{n-k} = 3^{k=1} \sum_{k=1}^n n - k = 3 \frac{n(n-1)}{2}$$

$$6. \prod_{k=1}^n k(k+1) = \left(\prod_{k=1}^n k \right) \left(\prod_{k=1}^n (k+1) \right) = (n!) \cdot ((n+1)!) = (n+1) \cdot (n!)^2$$

$$7. \prod_{k=3}^{n-2} \frac{k}{k+1} = \frac{3}{n-1}$$

$$8. \prod_{k=1}^n 7^{k^2} = 7^{\sum_{k=1}^n k^2} = 7^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$9. \prod_{k=1}^n (9k^2 - 1) = \prod_{k=1}^n (3k-1)(3k+1) = \frac{\prod_{l=1}^{3n+1} l}{\prod_{k=1}^n 3k} = \frac{(3n+1)!}{3^n (n!)}$$

III Systèmes

Exercice 4

1. $(5, 1, -2)$ est l'unique solution ;
2. pas de solution ;
3. on peut choisir x ou z comme paramètre. On trouve : $S = \{(-2/7 - z, 3/7, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{(x, 3/7, -2/7 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ suivant le paramètre choisi.
4. $(-1, 4, 2)$ comme unique solution.

Exercice 5

$$1. \begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y = a^2 \\ x - y + 3z = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ y - z = a^2 - a \\ 0 = a^3 + 2a^2 - 3a \end{cases} ;$$

- si $a^3 + 2a^2 - 3a \neq 0$: c'est-à-dire $a \notin \{-3, 0, 1\}$ alors il n'y a pas de solution ;

- sinon : c'est-à-dire $a \in \{-3, 0, 1\}$ alors dernière équation disparaît et le système devient :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ y - z = a^2 - a \end{cases}$$

dont les solutions forment : $\{(2a - 2z - a^2, z + a^2 - a, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

$$2. \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ (-a^2 + a + 6)z = 3 - a \end{cases};$$

- si $a^2 - a - 6 \neq 0$: c'est-à-dire $a \notin \{-2, 3\}$: on a un système échelonné, qui possède comme unique solution : $\left(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)$ (qui a bien un sens comme $a \neq -2$)
- si $a = -2$: alors la dernière équation devient $0 = 1$, donc le système n'a pas de solution ;
- si $a = 3$: alors la dernière équation disparaît, et le système devient :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$$

dont les solutions forment l'ensemble $S = \{(5z, 1 - 4z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

$$3. \begin{cases} x + 2z = 4 \\ 2x + 4z = 8 - a \\ -x - ay + (a^2 - 3a - 2)z = 2a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 4 \\ ay = -a \\ (a^2 - 3a)z = a \end{cases}$$

- si $a^2 - 3a \neq 0$: c'est-à-dire $a \notin \{0, 3\}$: on a un système échelonné qui possède une unique solution qui est : $\left(\frac{4a - 14}{a - 3}, -1, \frac{1}{a - 3}\right)$;
- si $a = 0$: seule la première équation reste, et le système devient : $x + 2z = 4$, qui admet comme ensemble solution : $S = \{(4 - 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$;
- si $a = 3$: la dernière équation devient $0 = 3$, qui n'a pas de solution, donc le système n'a aucune solution.