

## DM n°2

## I Sommes et sommes doubles

## Exercice 1

1. Somme arithmétique de raison 3 :  $\sum_{k=3}^{n-1} (3k-1) = (n-3) \cdot \frac{8+3n-4}{2} = \frac{(n-3)(3n+4)}{2}$

2. Somme arithmétique de raison 1, ou linéarité (au choix) :  $\sum_{k=0}^{n+1} k + n = (n+2) \cdot \frac{n+2n+1}{2} = \frac{(n+2)(3n+1)}{2}$

3. Somme binomiale :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3} + 1\right)^n = \frac{5^n}{3^n}$

4. Somme géométrique de raison  $3 \neq 1$  :  $\sum_{k=1}^{n+2} \frac{3^{k-1}}{2^4} = \frac{1}{16} \frac{1-3^{n+2}}{1-3} = \frac{3^{n+2}-1}{32}$

5. Somme géométrique de raison  $(1-x)^3$  : deux cas :

- si  $(1-x)^3 = 1$  (c'est-à-dire  $x = 0$ ) :  $\sum_{k=2}^{n-1} (1-x)^{3k} = \sum_{k=2}^{n-1} 1 = n-2$  ;

- si  $(1-x)^3 \neq 1$  (c'est-à-dire  $x \neq 0$ ) :  $\sum_{k=2}^{n-1} (1-x)^{3k} = (1-x)^6 \frac{1-(1-x)^{3n-6}}{1-(1-x)^3} = \frac{(1-x)^6 - (1-x)^{3n}}{1-(1-x)^3}$

6. Somme géométrique de raison  $\frac{(x-1)}{(x+1)^{-1}} = (x-1)(x+1) = x^2-1$  :

- si  $x^2-1 = 1$  (c'est-à-dire  $x = \pm\sqrt{2}$ ) :  $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-1)^k}{(x+1)^{-k}} = \sum_{k=0}^{n+1} 1 = n+2$  ;

- si  $x^2-1 \neq 1$  (c'est-à-dire  $x \neq \pm\sqrt{2}$ ) :  $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-1)^k}{(x+1)^{-k}} = \sum_{k=0}^{n+1} (x^2-1)^k = 1 \cdot \frac{1-(x^2-1)^{n+2}}{1-(x^2-1)} = \frac{(x^2-1)^{n+2}-1}{x^2-2}$

7. Somme télescopique :  $\sum_{k=1}^{n+2} (k+1)^5 - k^5 = (n+3)^5 - 1$

8. Somme télescopique :  $\sum_{k=3}^{n-1} \cos(2k+1) - \cos(2k-1) = \cos(2n-1) - \cos(5)$

9. Linéarité, et on se ramène à somme quadratique et arithmétique :  $\sum_{k=0}^n (k+3)^2 = \sum_{k=0}^n k^2 + 6k + 9 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3n(n+1) + 9(n+1) = \frac{(n+1)}{6} ((n+1)(2n+1) + 18n + 54) = \frac{(n+1)(2n^2+19n+54)}{6}$

10. Binôme :  $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^n \cdot n^k = 2^n \cdot ((n+1)^n - 1) = (2n+2)^n - 2^n$

11. Somme télescopique :  $\sum_{k=1}^{n-3} \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{n-3} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n-2) - \ln(1) = \ln(n-2)$

12. On calcule aussi la somme des termes de rangs impairs (comme dans le cours et suggéré par l'indication). On pose  $A = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 4^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{2k}$  et  $B = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1}$ . Alors :

$$A + B = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} 2^l = 3^n \text{ et } A - B = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (-2)^l = (1-2)^n = (-1)^n$$

et finalement :  $A = \frac{(A+B) + (A-B)}{2} = \frac{3^n + (-1)^n}{2}$  et  $B = \frac{(A+B) - (A-B)}{2} = \frac{3^n - (-1)^n}{2}$ .

13. On coupe la somme en deux suivant la parité de  $k$ , qu'on regroupe par linéarité :  $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = \sum_{l=1}^n 2l - \sum_{l=1}^n (2l-1) = \sum_{l=1}^n 1 = n$

14. Idem :  $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{l=1}^n (2l)^2 - \sum_{l=1}^n (2l-1)^2 = \sum_{l=1}^n (4l-1) = n \cdot \frac{3+4n-1}{2} = n(2n+1)$

15. On utilise la formule du capitaine puis un binôme :  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} n \binom{n-1}{l} = n 2^{n-1}$

16. On utilise deux fois la formule du capitaine et on fait apparaître un binôme :  $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} = \sum_{l=0}^{n-2} n(n-1) \binom{n-2}{l} = n(n-1) 2^{n-2}$

17. On utilise la formule du capitaine dans l'autre sens et on fait apparaître un binôme :  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{l=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{l} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

18. On a un télescopage sur deux indices :  $\sum_{k=2}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k-1} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} - \sqrt{1}$

19. On développe et on reconnaît par linéarité des sommes cubique, quadratique et arithmétique :  $\sum_{k=0}^n k(k+1)(k+2) = \sum_{k=0}^n k^3 + 3k^2 + 2k = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1) = \frac{n(n+1)}{4} (n(n+1) + (4n+6)) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

## Exercice 2

1.  $\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} k + l :$

Pour  $n = 1$ , on trouve : 2.

Formule générale : 
$$\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} k + l = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l (k + l) = \sum_{l=1}^n \frac{l(l+1+2l)}{2} = \sum_{l=1}^n \frac{3l^2 + l}{2} = \frac{3}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4} (2n+1+1) = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

Bonne valeur pour  $n = 1$ .

2.  $\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} 2k$

Pour  $n = 1$ , on trouve : 2

Formule générale : 
$$\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} 2k = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l 2k = \sum_{l=1}^n l(l+1) = \sum_{l=1}^n l^2 + l = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} (2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Bonne valeur pour  $n = 2$ .

3.  $\sum_{1 \leq k < l \leq n} kl$

Pour  $n = 1$ , on trouve : 0 (somme vide)

Formule générale : 
$$\sum_{1 \leq k < l \leq n} kl = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{l-1} kl = \sum_{l=1}^n (l-1) \frac{l+l^2-l}{2} = \sum_{l=1}^n \frac{l^3 - l^2}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{8} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)}{24} (3n(n+1) - 2(2n+1)) = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24} = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$$

Bonne valeur pour  $n = 1$ .

4.  $\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \frac{k}{l}$

Pour  $n = 1$ , on trouve : 1

Formule générale : 
$$\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \frac{k}{l} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l \frac{k}{l} = \sum_{l=1}^n \sum_{l(l+1)}^l 2l = \sum_{l=1}^n \frac{l+1}{2} = n \frac{1 + \frac{n+1}{2}}{2} = \frac{2n + n(n+1)}{4} = \frac{n(n+3)}{4}$$

Bonne valeur pour  $n = 1$ .

5.  $\sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \binom{l}{k} 2^l$

Pour  $n = 1$ , on trouve :  $\binom{0}{0} 2^0 + \binom{1}{0} 2^1 + \binom{1}{1} 2^1 = 1 + 2 + 2 = 5$ .

Formule générale : 
$$\sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \binom{l}{k} 2^l = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} 2^l = \sum_{l=0}^n 2^l 2^l = \sum_{l=0}^n 4^l = 1 \cdot \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

Bonne valeur pour  $n = 1$ .

6.  $\sum_{0 \leq k, l \leq n} \binom{n+1}{k} l^k$

Pour  $n = 1$ , on trouve :  $\binom{2}{0}0^0 + \binom{2}{0}1^0 + \binom{2}{1}0^1 + \binom{2}{1}1^1 = 1 + 1 + 0 + 2 = 4$ .

Formule générale :  $\sum_{0 \leq k, l \leq n} \binom{n+1}{k} l^k = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} l^k = \sum_{l=0}^n ((l+1)^{n+1} - l^{n+1}) = (n+1)^{n+1}$

Bonne valeur pour  $n = 1$ .

7.  $\sum_{k=0}^n k \cdot 3^k$

Pour  $n = 1$ , on trouve : 3

Formule générale :  $\sum_{k=0}^n k \cdot 3^k = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{k-1} 3^k = \sum_{l=0}^n \sum_{k=l+1}^n 3^k = \sum_{l=0}^n 3^{l+1} \frac{3^{n-l} - 1}{3 - 1} = \sum_{l=0}^n \frac{3^{n+1} - 3^{l+1}}{2} =$   
 $\frac{n+1}{2} 3^{n+1} - \frac{3}{2} \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{2n-1}{4} 3^{n+1} + \frac{3}{4}$

Bonne valeur pour  $n = 1$ .

8.  $\sum_{0 \leq k, l \leq n} \min(k, l)$

Pour  $n = 1$ , on trouve :  $0 + 0 + 0 + 1 = 1$ .

Formule générale :  $\sum_{0 \leq k, l \leq n} \min(k, l) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \min(k, l) = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{l=0}^k \min(k, l) + \sum_{l=k+1}^n \min(k, l) \right) =$   
 $\sum_{k=0}^n \left( \sum_{l=0}^k l + \sum_{l=k+1}^n k \right) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{k(k+1)}{2} + k(n-k) \right) = \sum_{k=0}^n \frac{2n+1}{2} k - \frac{k^2}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} -$   
 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

Bonne valeur pour  $n = 1$

9.  $\sum_{0 \leq k, l \leq n} |k - l|$

Pour  $n = 1$ , on trouve :  $0 + 1 + 1 + 0 = 2$ .

Formule générale :  $\sum_{0 \leq k, l \leq n} |k-l| = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n |k-l| = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{l=0}^k |k-l| + \sum_{l=k+1}^n |k-l| \right) = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{l=0}^k (k-l) + \sum_{l=k+1}^n (l-k) \right) =$   
 $\sum_{k=0}^n \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} = \sum_{k=0}^n k^2 - nk + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)}{2} +$   
 $\frac{n(n+1)^2}{2} = \frac{n(n+1)}{6} (2n+1 - 3n + 3n + 3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ .

Bonne valeur pour  $n = 1$ .

## II Produits

### Exercice 3

1.  $\prod_{k=1}^{n+1} 5k = 5^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k = 5^{n+1} (n+1)!$

$$2. \prod_{k=2}^{n-1} 2k^2 = 2^{n-2} \left( \prod_{k=2}^{n-1} k \right)^2 = 2^{n-2} ((n-1)!)^2$$

$$3. \prod_{k=1}^n (2k+1) = \frac{\prod_{l=1}^{2n+1} l}{\prod_{k=1}^n 2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n (n!)}$$

$$4. \prod_{k=1}^n 3^{3k+1} = 3^{\sum_{k=1}^n 3k+1} = 3^{\frac{n(3n+5)}{2}}$$

$$5. \prod_{k=1}^n 3^{n-k} = 3^{\sum_{k=1}^n n-k} = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$6. \prod_{k=1}^n k(k+1) = \left( \prod_{k=1}^n k \right) \left( \prod_{k=1}^n (k+1) \right) = (n!) \cdot ((n+1)!) = (n+1) \cdot (n!)^2$$

$$7. \prod_{k=3}^{n-2} \frac{k}{k+1} = \frac{3}{n-1}$$

$$8. \prod_{k=1}^n 7^{k^2} = 7^{\sum_{k=1}^n k^2} = 7^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$9. \prod_{k=1}^n (9k^2 - 1) = \prod_{k=1}^n (3k-1)(3k+1) = \frac{\prod_{l=1}^{3n+1} l}{\prod_{k=1}^n 3k} = \frac{(3n+1)!}{3^n (n!)}$$

### III Systèmes

#### Exercice 4

1.  $(5, 1, -2)$  est l'unique solution ;
2. pas de solution ;
3. on peut choisir  $x$  ou  $z$  comme paramètre. On trouve :  $S = \{(-2/7 - z, 3/7, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{(x, 3/7, -2/7 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$  suivant le paramètre choisi.
4.  $(-1, 4, 2)$  comme unique solution.

#### Exercice 5

$$1. \begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y = a^2 \\ x - y + 3z = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ y - z = a^2 - a \\ 0 = a^3 + 2a^2 - 3a \end{cases} ;$$

- si  $a^3 + 2a^2 - 3a \neq 0$  : c'est-à-dire  $a \notin \{-3, 0, 1\}$  alors il n'y a pas de solution ;

- sinon : c'est-à-dire  $a \in \{-3, 0, 1\}$  alors dernière équation disparaît et le système devient :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ y - z = a^2 - a \end{cases}$$

dont les solutions forment :  $\{(2a - 2z - a^2, z + a^2 - a, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

$$2. \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ (-a^2 + a + 6)z = 3 - a \end{cases};$$

- si  $a^2 - a - 6 \neq 0$  : c'est-à-dire  $a \notin \{-2, 3\}$  : on a un système échelonné, qui possède comme unique solution :  $\left(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)$  (qui a bien un sens comme  $a \neq -2$ )
- si  $a = -2$  : alors la dernière équation devient  $0 = 1$ , donc le système n'a pas de solution ;
- si  $a = 3$  : alors la dernière équation disparaît, et le système devient :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$$

dont les solutions forment l'ensemble  $S = \{(5z, 1 - 4z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ .

$$3. \begin{cases} x + 2z = 4 \\ 2x + ay + 4z = 8 - a \\ -x - ay + (a^2 - 3a - 2)z = 2a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 4 \\ ay = -a \\ (a^2 - 3a)z = a \end{cases}$$

- si  $a^2 - 3a \neq 0$  : c'est-à-dire  $a \notin \{0, 3\}$  : on a un système échelonné qui possède une unique solution qui est :  $\left(\frac{4a - 14}{a - 3}, -1, \frac{1}{a - 3}\right)$  ;
- si  $a = 0$  : seule la première équation reste, et le système devient :  $x + 2z = 4$ , qui admet comme ensemble solution :  $S = \{(4 - 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$  ;
- si  $a = 3$  : la dernière équation devient  $0 = 3$ , qui n'a pas de solution, donc le système n'a aucune solution.