DM 10

Instructions générales :
Aucun document n'est autorisé.
L'emploi d'une calculatrice est interdit.
Les résultats demandés seront $\boxed{\textbf{encadrés}}$, les étapes importantes et les résultats intermédiaires devront être mis en évidence par un **surlignement**, ligne sautée, ou tout autre moyen de votre choix.
Une attention particulière à la rédaction et à l'orthographe est requise : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Barème indicatif sur points (donnant une idée du temps respectif qu'il est bon de consacrer à chaque exercice:

- Exercice 1 : 20 points ;
- Problème :
  - partie I : 28 points ;
  - partie II : 18.5 points ;
  - partie III : 14.5 points ;
  - partie IV : 9 points

I Exercice

Exercice 1 On considère trois dés déséquilibrés, numérotés 1, 2 et 3 :

- le dé 1 a une probabilité de 2/3 de tomber sur 6, et les autres faces sont équiprobables ;
- les dés 2 et 3 ont une probabilité de 1/3 de tomber sur 6, et les autres faces sont équiprobables.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire donnant la face sur laquelle le dé numéro i tombe.
On s'intéresse d'abord individuellement aux trois dés.

1. Donner les lois des variables aléatoires X_1, X_2, X_3.

On place ensuite les trois dés, indiscernables au toucher, dans un sac. On en tire un au hasard, et on le lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois de manière indépendante. On note :

- pour $i \in \{1, 2, 3\}$: D_i l'événement "on a tiré le dé numéro i" ;
- pour $k \in [\![1; n]\!]$: Y_k la variable aléatoire donnant la face sur laquelle le dé choisi est tombé au k-ème lancer.

2. En utilisant un système complet d'événements bien choisi, déterminer, pour $k \in [\![1; n]\!]$, la loi de Y_k.

Pour la suite de l'exercice, on s'intéresse uniquement au fait de faire des 6. On note, pour $k \in [\![1; n]\!]$, l'événement A_k ="on fait un 6 au k-ème lancer".

3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer $P_{D_i}(A_1)$, $P_{D_i}(A_2)$ et $P_{D_i}(A_1 \cap A_2)$.
4. En déduire que $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{2}{9}$. Les événements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?

5. Montrer que pour pour tout $k \in [\![1;n]\!]$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \frac{2^k + 2}{3^{k+1}}$$

et en déduire la valeur pour de tels k de : $P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k)$.

6. Calculer $P_{A_1 \cap A_2}(D_1)$. Et plus généralement, montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$:

$$P_{A_1 \cap \cdots \cap A_k}(D_1) = \frac{2^k}{2^k + 2}.$$

7. On suppose que le dé n'a fait que des 6 quand on l'a lancé k fois. Vaut-il mieux parier sur le fait que c'est le dé 1 qui a été choisi, ou sur le fait que le lancer suivant fera également un 6 ?

II Problème

On considère pour tout le problème f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x} \text{ et } f(0) = 1.$$

II.1 Première étude de f

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, et étudier sa parité.
2. On souhaite étudier f au voisinage de 0 :
   (a) Donner le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
   (b) En déduire que f est dérivable en 0, et donner la valeur de $f'(0)$, l'équation de la tangente à la courbe de f en 0, et la position de la courbe de f relativement à cette tangente au voisinage de 0.
3. On souhaite étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$:
   (a) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   (b) En déduire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pourra commencer par exprimer le développement limité de $x \mapsto (1 + x^2)\text{Arctan}(x)$ à l'ordre 2 en 0.
   (c) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} x^2 f'(x).$$

   (d) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$. On justifiera en particulier que f' ne s'annule qu'en 0.
   (e) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$, en précisant bien les limites.

4. (a) À l'aide de la question précédente, justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble J que l'on précisera. On notera g cette bijection, c'est-à-dire que :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

   (b) Justifier que g^{-1} est continue sur J.

   (c) La fonction g^{-1} est-elle $\mathcal{C}^\infty$ sur J ? Si oui, le prouver. Sinon, donner le plus grand sous-ensemble de J sur laquelle elle est $\mathcal{C}^\infty$.

5. À l'aide des questions précédentes, tracer dans un même repère les courbes de f et de g^{-1}. On prendra comme unité 2 grands carreaux ou 2 cm. Et on fera bien figurer la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 0 ainsi que la première bissectrice.

II.2 Seconde étude de f, et application à une suite récurrente

6. On souhaite dans un premier temps étudier de manière plus précises les variations de f en contrôlant les valeurs de f'. On rappelle que le signe de f' a été déterminé en question 3 et qu'une expression de f' à l'aide d'une intégrale a été déterminée à cette même question.

   (a) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $(a^2 + b^2) \geqslant 2ab$ et en déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (1 + t^2)^2 \geqslant 2t.$$

   (b) Soit $x \in]0; +\infty[$:

      i. Déduire de la question précédente que : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4}x^2$.

      ii. En déduire que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   (c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   Pour la suite de cette partie, on souhaite étudier le comportement de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

7. On souhaite étudier les éventuelles limites possibles pour (u_n).

   (a) Montrer que (u_n) est bornée. En déduire que, si (u_n) possède une limite, celle-ci est finie et est un point fixe de f.

   (b) Montrer que f possède un unique point fixe ℓ sur $\mathbb{R}$, et que $\ell \in \left] \dfrac{1}{\sqrt{3}}; 1 \right[$.

   Indication : on pourra utiliser la majoration de $|f'|$ de la question précédente.

8. Déduire des questions précédentes qu'il existe deux constantes $K \in [0; 1[$ (que l'on donnera explicitement) et $b \in \mathbb{R}$ (que l'on exprimera à l'aide de a et ℓ) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant K^n b.$$

9. Conclure.

II.3 Une fonction définie par une intégrale

On définit pour la suite du problème l'application φ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \varphi(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \text{ et } \varphi(0) = 1.$$

10. Justifier que f possède une unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On notera F cette primitive.

11. Pour $x \neq 0$, exprimer $\varphi(x)$ à l'aide de F.

12. En déduire que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x\varphi'(x) + \varphi(x) = 2f(2x) - f(x)$.

13. On souhaite étudier plus finement φ au voisinage de 0.

    (a) Montrer que φ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, et le donner.
    Indication : on pourra commencer par exprimer le dl3 de F en 0.

    (b) En déduire que φ est continue en 0.

    (c) En déduire également que φ est dérivable en 0 : on donnera la valeur de $\varphi'(0)$, l'équation de la tangente à la courbe de φ en 0, ainsi que la position relative de cette courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

14. Déduire des questions précédentes que φ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : (E) : $x^2y' + xy = \arctan(2x) - \arctan(x)$.

15. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

16. En déduire que φ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

II.4 Une suite implicite

On souhaite étudier dans cette partie une estimation de la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ v_n > 0 \text{ et } f(v_n) = e^{-n}$$

17. Justifier proprement que la suite (v_n) est bien définie. En particulier, on mettra bien en évidence le choix de l'énoncé de ne considérer que les termes d'indice $n \geqslant 1$.

18. Montrer que (v_n) est strictement croissante, et donner sa limite.

19. En déduire un équivalent de (v_n). On pourra commencer par déterminer un équivalent de $\mathrm{Arctan}(v_n)$.

20. Montrer que la suite $\left(v_n - \frac{\pi}{2}e^n\right)$ converge, et déterminer sa limite.

21. Donner un développement asymptotique à la précision e^{-n}. On écrira ce développement comme une combinaison linéaire de puissances (positives, négatives ou nulles) de e^n.