Mathématiques PCSI 2025–2026

Thomas MEGARBANE

Table des matières

Chapitre 1

Logique et raisonnements

I Assertions

Définition I.1. *On appelle* ***assertion*** *(ou* ***proposition****) une phrase qui est soit vraie soit fausse (et pas les deux).*
Une assertion peut dépendre d'une variable x, et on la note alors $A(x)$.
On dit que deux assertions A et B sont ***équivalentes****, ce que l'on note $A \equiv B$, si elles ont toujours la même valeur de vérité.*

Exemples I.2.

1. *"2 est plus petit que 3" est une assertion vraie ;*
2. *"5 est plus grand que 3" est une assertion fausse ;*
3. *l'assertion $A(x) =$"x est un nombre premier" dépend de x : elle est vraie si $x = 2$ et fausse si $x = 10$ par exemple.*

Définition I.3. *Si A et B sont deux assertions, on définit les assertions suivantes :*

1. *(non A) : qui est vraie si A est fausse, et fausse sinon, qu'on appelle la* ***négation****, notée $\neg A$;*
2. *(A ou B) : qui est vraie si l'une des deux assertions est vraie, et fausse sinon, qu'on appelle la* ***disjonction****, notée $A \vee B$;*
3. *(A et B) : qui est vraie si les deux assertions sont vraies, et fausse sinon, qu'on appelle la* ***conjonction****, notée $A \wedge B$.*

Exemples I.4. *Si $A =$"n est un multiple de 2" et $B =$"n est un multiple de 3", alors :*

1. *(non A)="n est impair"*
2. *(A ou B)="n est divisible soit par 2, soit par 3"*
3. *(A et B)="n est un multiple de 6" (par théorème de Gauss)*

Définition I.5. *On appelle* ***table de vérité*** *d'une assertion le tableau donnant sa valeur de vérité en fonction de celles des assertions utilisées pour la construire.*

Exemples I.6. *La négation, la disjonction et la conjonction ont pour tables de vérité :*

A	non A
V	F
F	V

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Proposition I.7. *Si A, B, C sont des assertions, on a les propriétés suivantes :*

1. $non\,(non\ A) \equiv A$;
2. $(A\ et\ B)\ et\ C \equiv A\ et\ (B\ et\ C)$;
3. $(A\ ou\ B)\ ou\ C \equiv A\ ou\ (B\ ou\ C)$;
4. $A\ et\ (B\ ou\ C) \equiv (A\ et\ B)\ ou\ (A\ et\ C)$;
5. $A\ ou\ (B\ et\ C) \equiv (A\ ou\ B)\ et\ (A\ ou\ C)$;
6. $non\,(A\ et\ B) \equiv [(non\ A)\ \ ou\ \ (non\ B)]$;
7. $non\,(A\ ou\ B) \equiv [(non\ A)\ \ et\ \ (non\ B)]$.

Démonstration. Par exemple, montrons la dernière. On procède par table de vérité :

A	B	A ou B	non(A ou B)	non A	non B	(non A) et (non B)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

□

II Quantificateurs

Définition II.1. *Soit $A(x)$ une assertion dépendant de x, qui décrit un ensemble E :*

1. *Si, lorsque x décrit E, $A(x)$ est toujours vraie, on écrit :*
$$\forall x \in E,\ A(x)$$
qu'on lit "quel que soit x appartenant à E, $A(x)$". C'est le ***quantificateur universel****.*
2. *S'il existe x dans E tel que $A(x)$ est vraie, on écrit :*
$$\exists x \in E,\ A(x)$$
qu'on lit "il existe x appartenant à E tel que $A(x)$". C'est le ***quantificateur existentiel****.*

Proposition II.2. *Avec les mêmes notations, on a :*

1. $non\,(\forall x \in E,\ A(x)) \equiv \exists x \in E,\ (non\ A(x))$;
2. $non\,(\exists x \in E,\ A(x)) \equiv \forall x \in E,\ (non\ A(x))$;

Remarques II.3.
1. *S'il existe un unique x pour lequel $A(x)$ est vrai, on écrit : $\exists! x \in E,\ A(x)$.*
2. *L'ordre des quantificateurs est important. Par exemple les assertions :*
$$[\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ A(x,y)]\ \ et\ \ [\exists y \in E,\ \forall x \in E,\ A(x,y)]$$
ne sont pas les mêmes : dans la première, y dépend de x ; dans la seconde, y est indépendant de x.

Exemples II.4.
1. *L'assertion :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ n < m$$
veut dire que : pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que $n < m$. Elle est vraie : pour n fixé, l'entier $m = n + 1$ convient.
2. *L'assertion :*
$$\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n < m$$
veut dire que : il existe un entier naturel m tel que, pour tout entier naturel m, $n < m$. Elle est fausse : si $n = m$ par exemple, on ne pourra avoir $n < m$.

III Implications, réciproques, contraposées et équivalences

Définition III.1. *Soient A, B sont deux assertions.*

1. *si, dès que A est vraie, alors B est aussi vraie : on dit que A **implique** B, que l'on note $A \Rightarrow B$ ou $B \Leftarrow A$ et que l'on lit "si A alors B"; on dit alors que : A est une condition **suffisante** pour B, ou que B est une condition **nécessaire** pour A.*
2. *si A implique B et que B implique A : on dit que A est **équivalent** à B, que l'on note $A \Leftrightarrow B$ ou $B \Leftrightarrow A$ et que l'on lit "A si et seulement si B"; on dit alors que : A est une condition **nécessaire et suffisante** pour B.*

Les tables de vérités correspondantes sont :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque III.2. *L'implication $A \Rightarrow B$ ne donne pas les valeurs de vérité de A et de B : elle fait juste un lien entre les deux.*

Exemples III.3.

1. *si n est un entier, alors "n est un multiple de 6" est une condition suffisante, mais non nécessaire, pour que n soit pair.*
2. *si x est un réel, alors "$x^2 = 1$" est une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que x soit égal à 1 ;*
3. *si x est un réel, les assertions "$x^3 = -1$" et "$x = -1$" sont équivalentes.*

Proposition III.4. *Si A, B sont deux assertions, alors :*

1. $(A \Rightarrow B) \equiv [(non\ A)\ \ ou\ B]$;
2. $[non\ \ (A \Rightarrow B)] \equiv [A\ \ et\ \ (non\ B)]$;
3. $(A \Leftrightarrow B) \equiv (A\ \ et\ B)\ \ ou\ ((non\ A)\ \ et\ (non\ B))$;
4. $non\ (A \Leftrightarrow B) \equiv (A\ \ et\ (non\ B))\ \ ou\ ((non\ A)\ \ et\ B)$.

Démonstration. Par tables de vérité. Montrons par exemple la première :

A	B	$A \Rightarrow B$	non A	[(non A) ou B]
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

□

Proposition-Définition III.5. *Si A et B sont deux assertions :*

1. *on appelle **réciproque** de l'implication $A \Rightarrow B$ l'implication $B \Rightarrow A$: il n'y a pas de lien de vérité entre une implication et sa réciproque ;*
2. *on appelle **contraposée** de l'implication $A \Rightarrow B$ l'implication $(non\ B) \Rightarrow (non\ A)$: une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité, elles sont équivalentes.*

Démonstration.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	non B	non A	(non B) $\Rightarrow$ (non A)
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

□

Remarque III.6. *Pour la contraposée, on pouvait aussi constater que :*

$$(A \Rightarrow B) \equiv ((non\ A)\ ou\ B) \equiv ((non\ (non\ B))\ ou\ (non\ A)) \equiv ((non\ B) \Rightarrow (non\ A)).$$

IV Méthodes de raisonnements

IV.1 Raisonnement par déduction

Méthode IV.1. *Pour montrer l'implication $A \Rightarrow B$, on peut supposer que A est vraie et montrer alors que B est vraie.*
Pour montrer l'équivalence $A \Leftrightarrow B$, on peut montrer séparément que les implications $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ sont vraies.
Pour prouver que A et B, on montre séparément que A et B sont vraies.
Pour prouver que A ou B, on peut supposer que A est fausse, et montrer alors que B est vraie.

Remarques IV.2.

1. *L'utilisation d'exemple repose sur l'implication :*
$$(x \in E\ et\ A(x)) \Rightarrow \exists x \in E,\ A(x).$$
2. *Un contre-exemple repose sur l'implication :*
$$(x \in E\ et\ non\ A(x)) \Rightarrow non\,(\forall x \in E,\ A(x))\,.$$

IV.2 Raisonnement par disjonction de cas

Méthode IV.3. *Lorsqu'une assertion $A(x)$ dépend d'une variable x qui prend des valeurs dans E ou dans F, pour montrer que $A(x)$ est vraie, on peut montrer que :*

1. *$A(x)$ est vraie pour x décrivant E ;*
2. *$A(x)$ est vraie pour x décrivant F.*

Remarque IV.4. *Les raisonnements par tables de vérités sont des raisonnements par disjonction de cas.*

Exemple IV.5. *Montrer que, pour tout entier naturel n, le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.*
On procède par disjonction de cas :

— *1er cas : si n est pair : on pose $n = 2m$ pour $m \in \mathbb{N}$, et alors :*
$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2m(n+1)}{2} = \underbrace{m}_{\in\mathbb{N}}\underbrace{(n+1)}_{\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N};$$

— *2nd cas : si n est impair : on pose $n = 2m+1$ pour $m \in \mathbb{N}$, et alors :*
$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(2m+2)}{2} = \underbrace{n}_{\in\mathbb{N}}\underbrace{(m+1)}_{\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}.$$

Et donc pour tout entier naturel n, on a bien que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

IV.3 Raisonnement par contraposition

Méthode IV.6. *Pour montrer l'implication $A \Rightarrow B$, on peut montrer sa contraposée $(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)$. On peut donc supposer que B est fausse, et montrer alors que A est fausse.*

Exemple IV.7. *Montrer que si n est un entier tel que n^2 est pair, alors n est pair.*
On procède par contraposée. On souhaite donc montrer que, si n est un entier naturel impair, alors n^2 est impair.
Soit donc $n \in \mathbb{N}$ impair. On écrit $n = 2m + 1$ pour $m \in \mathbb{N}$. Et alors :

$$n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2 \cdot \underbrace{(2m^2 + 2m)}_{\in \mathbb{N}} + 1$$

qui est bien impair. Ce qui prouve la contraposée.
D'où le résultat cherché.

IV.4 Raisonnement par l'absurde

Méthode IV.8. *Pour montrer qu'une assertion est vraie, on peut montrer qu'elle n'est pas fausse. Pour cela, on suppose que l'assertion est fausse, et on cherche à aboutir à une contradiction, ou à une assertion dont on sait qu'elle est fausse.*

Remarque IV.9. *Beaucoup de raisonnements par l'absurde peuvent être remplacés par des raisonnements par contraposition (et inversement).*

Exemple IV.10. *Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*
Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On écrit alors : $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ sous forme irréductible, c'est-à-dire que $a, b \in \mathbb{N}$ sont sans diviseur commun autre que 1.
En élevant au carré, il vient : $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, et donc :
- *$a^2 = 2b^2$ est pair, donc a est pair, et on peut écrire $a = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$;*
- *en réinjectant, il vient : $b^2 = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{(2n)^2}{2} = \dfrac{4n^2}{2} = 2n^2$ est pair, donc b est pair.*

D'où la contradiction, car alors 2 diviserait a et b.

IV.5 Raisonnement par analyse-synthèse

Méthode IV.11. *Pour montrer qu'un problème admet une unique solution, on peut procéder en deux temps :*
- *l'**analyse** : on montre qu'une hypothétique solution est nécessairement d'une certaine forme (ce qui réduit les solutions possibles) ;*
- *la **synthèse** : on regarde, parmi les solutions possibles de l'analyse, lesquelles sont bien des solutions.*

Remarque IV.12. *C'est un raisonnement approprié lorsqu'il est plus facile de procéder par implications plutôt que par équivalences.*

Exemple IV.13. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x+2} = x$.*

1. *analyse : on a les implications :*

$$\sqrt{x+2} = x \Rightarrow x + 2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

   et on arrive donc à une équation polynomiale du second degré, que l'on sait résoudre. On a $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$, donc les solutions possibles sont $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$.
2. *synthèse : $\sqrt{x_1 + 2} = 1 \neq -1 = x_1$ et $\sqrt{x_2 + 2} = 2 = x_2$, donc l'unique solution au problème est 2.*

Exemple IV.14. *Montrer que toute fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. *analyse : on suppose qu'il existe deux fonctions $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : g est paire, h est impaire et $f = g + h$. Si $x \in \mathbb{R}$, on a ainsi :*
$$\left\{ \begin{array}{c} g(-x) = g(x) \\ h(-x) = -h(x) \\ f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) \end{array} \right.$$
donc $g(x)$ et $h(x)$ sont solutions du système :
$$\left\{ \begin{array}{ccccc} g(x) & + & h(x) & = & f(x) \\ g(x) & - & h(x) & = & f(-x) \end{array} \right.$$
En prenant la somme et la différence des deux lignes du système, on trouve :
$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$
*donc **nécessairement** g et h sont définies par les formules ci-dessus.*
2. *synthèse : considérons g, h définies par les formules ci-dessus. Alors, si $x \in \mathbb{R}$, on a :*
   — $g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$*, donc g est paire ;*
   — $h(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x)$*, donc h est impaire ;*
   — $g(x) + h(x) = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$*, donc $f = g + h$.*

Ce qui montre bien l'existence et l'unicité d'une telle écriture.

Remarque IV.15. *Un problème où on montre existence et unicité d'une solution se prête bien à un raisonnement par analse-synthèse : l'analyse montre l'unicité, et la synthèse l'existence.*

IV.6 Raisonnement par récurrence

Théorème IV.16 (récurrence simple)**.** *Soit $A(n)$ une assertion dépendant de n décrivant $\mathbb{N}$. On suppose que :*
- *$A(0)$ est vraie ;*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.*

Alors $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème IV.17 (récurrence d'ordre k)**.** *Soit $A(n)$ une assertion dépendant de n décrivant $\mathbb{N}$, et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :*
- *$A(0), A(1), \dots, A(k-1)$ sont vraies ;*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(A(n-k+1)$ et $A(n-k+2)$ et $\dots$ et $A(n)) \Rightarrow A(n+1)$.*

Alors $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème IV.18 (récurrence forte)**.** *Soit $A(n)$ une assertion dépendant de n décrivant $\mathbb{N}$. On suppose que :*
- *$A(0)$ est vraie ;*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(A(0)$ et $A(1)$ et $\dots$ et $A(n)) \Rightarrow A(n+1)$.*

Alors $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple IV.19. *Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.*

— *initialisation : si* $n = 0$*, on a :*

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 0 = \sum_{k=0}^{0} k^2.$$

— *hérédité : soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*. Alors :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{n+1}{6}[n(2n+1) + 6(n+1)] \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité.
D'où la récurrence.

Exemple IV.20. *On considère la suite de Fibonacci, définie par :*

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Alors on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$*, ce que l'on montre par récurrence double :*

— *initialisation : on a* $u_0 = 0 \in \mathbb{N}$ *et* $u_1 = 1 \in \mathbb{N}$ *donc pour* $n = 0$ *et* $n = 1$ *le résultat est vérifié ;*

— *hérédité : soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{N}$*. Alors :*

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \in \mathbb{N}$$

car la somme de deux entiers naturels est un entier naturel. Ce qui prouve l'hérédité.
D'où la récurrence.

Exemple IV.21. *On montrera, avec un récurrence forte que tout entier naturel non nul s'écrit (de manière unique) comme produit de nombres premiers.*

Chapitre 2

Rappels et compléments de calculs

I Les ensembles de nombres usuels

Définition I.1. *On définit les ensembles de nombres suivants :*

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ *l'ensemble des* ***entiers naturels*** *;*
2. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ *l'ensemble des* ***entiers relatifs*** *;*
3. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ *l'ensemble des* ***rationnels*** *;*
4. $\mathbb{R}$ *l'ensemble des abscisses d'une droite graduée, l'ensemble des* ***réels*** *;*
5. $\mathbb{C}$ *l'ensemble nombres de la forme* $a + ib$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $i^2 = -1$*, l'ensemble des* ***complexes***

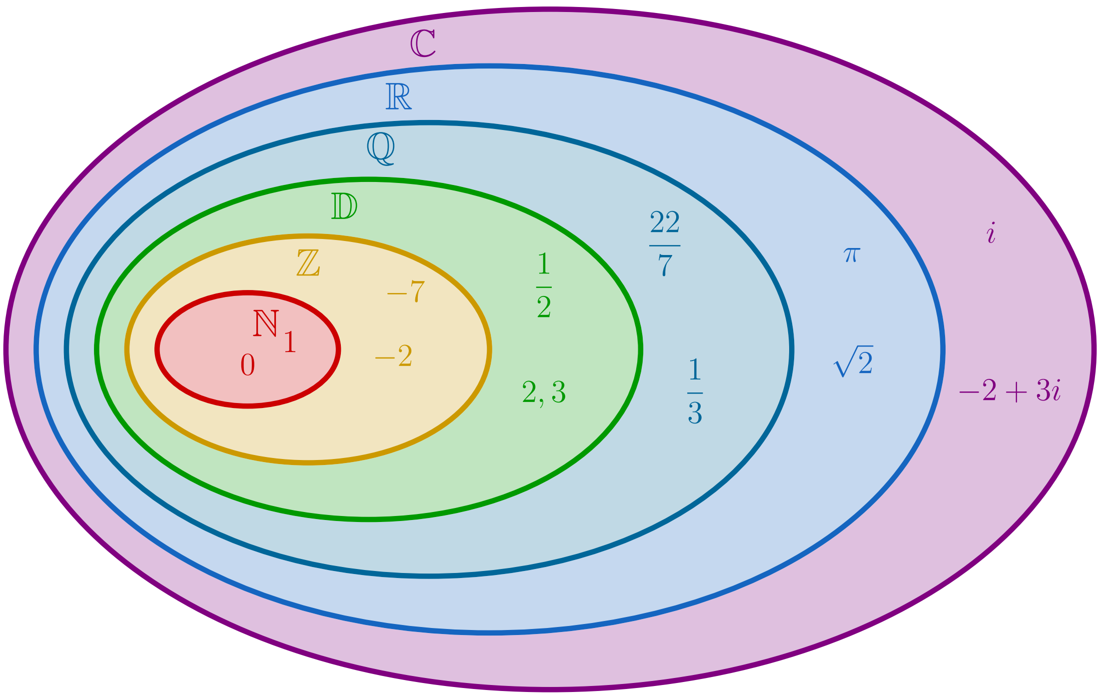
Et on note $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ *les mêmes ensembles privés de* 0*.*
L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est appelé l'ensemble des* ***irrationnels****.*

Remarque I.2. *On considère parfois aussi l'ensemble* $\mathbb{D}$ *des nombres* ***décimaux*** *:* $\mathbb{D} = \{\frac{n}{10^m} \,|\, n, m \in \mathbb{Z}\}$*.*

Proposition I.3. *On a les inclusions :*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

et ces inclusions sont strictes.



II Intervalles et inégalités dans $\mathbb{R}$

Définition II.1. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, on définit le* ***segment*** *$[a;b]$ comme :*

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}.$$

On dit qu'un ensemble non vide I de $\mathbb{R}$ est un ***intervalle*** *s'il vérifie que :*

$$\forall a, b \in I, \ [a;b] \subset I.$$

Remarque II.2. *Cela revient à dire qu'un intervalle contient tous les réels entre deux de ses éléments.*

Exemples II.3.

1. *si $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $I = \{\alpha\}$ est un intervalle :*
   - *$\alpha \in I$ par définition, donc I est non vide ;*
   - *soient $a, b \in I$, et $x \in [a;b]$: comme $a, b \in I$, alors $a = b = \alpha$; et ainsi $\alpha \leq x \leq \alpha$, donc $x = \alpha$ appartient bien à I. Et donc $[a,b] \subset I$;*

   ce qui prouve bien que I est un intervalle.
2. *tout segment non vide est un intervalle : si $I = [\alpha;\beta]$ pour $\alpha \leq \beta$, alors :*
   - *$\alpha \in I$, comme $\alpha \leq \alpha \leq \beta$, donc I est non vide ;*
   - *soient $a, b \in I$ et $x \in [a,b]$: alors $a \leq x \leq b$. Mais :*
     - *$a \in I$, donc $\alpha \leq a \leq \beta$;*
     - *$b \in I$, donc $\alpha \leq b \leq \beta$;*

     et ainsi ; $\alpha \leq a \leq x \leq b \leq \beta$, donc $\alpha \leq x \leq \beta$, donc $x \in I$. Et donc $[a,b] \subset I$.

   donc I est un intervalle.
3. *si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifient $\alpha < \beta$, alors $J =]\alpha;\beta[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, \alpha < x < \beta\}$ est un intervalle :*
   - *$\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \in I$: on a en effet que $\alpha < \beta$, et donc :*

     $$\gamma - \alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \frac{\beta-\alpha}{2} > 0 \text{ et } \gamma - \beta = \frac{\alpha-\beta}{2} < 0$$

     et donc $\alpha < \gamma < \beta$, donc $\gamma \in J$;
   - *soient $a, b \in J$ et $x \in [a,b]$: alors $a \leq x \leq b$. Mais :*
     - *$a \in J$, donc $\alpha < a (< \beta)$;*
     - *$b \in J$, donc $(\alpha <) b < \beta$;*

     et ainsi ; $\alpha < a \leq x \leq b < \beta$, donc $\alpha < x < \beta$, donc $x \in J$. Et donc $[a,b] \subset J$.

   donc J est un intervalle.
4. *$\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle car : $-1, 1 \in \mathbb{R}^*$ mais $0 \in [-1;1]$ n'est pas dans $\mathbb{R}^*$, donc on n'a pas l'inclusion $[-1;1] \subset \mathbb{R}^*$;*
5. *$\mathbb{N}$ n'est pas un intervalle car : $0 \in \mathbb{N}$ et $1 \in \mathbb{N}$ mais $\frac{1}{2} \in [0;1]$ n'est pas dans $\mathbb{N}$, donc on n'a pas l'inclusion $[0;1] \subset \mathbb{N}$.*

Proposition II.4. *Tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ est d'une (et une seule) des formes suivantes, où a, b désignent des réels tels que $a < b$:*

1. *$\{a\}$;*
2. *$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$;*
3. *$[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$;*
4. *$]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$;*
5. *$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$;*

6. $[a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x\}$;
7. $]a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\}$;
8. $]-\infty;b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leq b\}$;
9. $]-\infty;b[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<b\}$;
10. $\mathbb{R}$.

Définition II.5. *Les intervalles précédents définis par des inégalités strictes (resp. larges) sont appelés des **intervalles ouverts** (resp. **intervalles fermés**).*
Plus généralement, si I est un intervalle, on appelle :
- ***intérieur** de I, noté $\overset{\circ}{I}$, l'intervalle I privé de ses bornes ;*
- ***adhérence** de I, noté $\overline{I}$, l'intervalle I auquel on rajoute ses bornes.*

Remarques II.6.

1. *Prendre l'intérieur, c'est "ouvrir" l'intervalle : $\overset{\circ}{I}$ est le pus grand intervalle ouvert inclus dans I (et éventuellement l'ensemble vide).*
2. *Prendre l'adhérence, c'est "fermer" l'intervalle : $\overline{I}$ est le pus petit intervalle fermé contenant I.*

III Racines et puissances

Définition III.1. *Si $x\geq 0$, on appelle sa **racine carrée**, notée $\sqrt{x}$, comme l'unique réel positif ou nul dont le carré vaut x.*

Remarque III.2. *Comme $x^2=(-x)^2$, alors $\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x\leq 0\end{cases}$.*

Proposition III.3. *Soient x,y positifs. Alors :*

$$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y} \text{ et } \sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \text{ (si } y\neq 0).$$

Démonstration. Par définition, on a $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ sont positifs, donc leur produit aussi. Et :

$$\left(\sqrt{x}\sqrt{y}\right)^2=(\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2=xy$$

d'où la première égalité. On procède de même pour le quotient. □

Remarques III.4.

1. *on utilise les carrés parfaits pour simplifier les racines :* $1,4,9,16,25,36,\dots,289,324,361,\dots$;
2. *on évite de garder des racines au dénominateur dans un quotient. On simplifie une fraction en multipliant par $\sqrt{a}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ou $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ pour les faire disparaître.*

Exemples III.5.

1. $\sqrt{180}=\sqrt{36\times 5}=6\sqrt{5}$;
2. $\sqrt{\dfrac{3}{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$;
3. $\dfrac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{8}$.

Définition III.6. *Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note :*

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0 \end{cases}.$$

Si $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}_-$, on note :

$$x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{(-n) \text{ fois}}}.$$

Remarque III.7. *On peut aussi définir x^n (pour $n \in \mathbb{N}$) récursivement, par :*

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x \cdot x^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}.$$

Proposition III.8. *Si $x, y \in \mathbb{R}$ et $n, m \in \mathbb{N}$:*

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n,\ x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m,\ (xy)^n = x^n y^n$$

et ces formules restent valables pour $n, m \in \mathbb{Z}$ si $x, y \neq 0$.

IV Manipuler des égalités et des inégalités

Proposition IV.1. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors :*

1. *si $c \neq 0$: $a = b$ si, et seulement si, $ac = bc$;*
2. *si $a = b$, alors $a^2 = b^2$;*
3. *$ab = 0$ si, et seulement si, $a = 0$ ou $b = 0$;*
4. *pour tout fonction f définie en a et b : si $a = b$, alors $f(a) = f(b)$.*

Remarque IV.2. *La dernière proposition n'est en général pas une équivalence. Par exemple, pour une fonction constante, l'égalité $f(a) = f(b)$ est vérifiée peu importe la valeur de a et b.*
De manière moins extrême, on verra que : $\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a = \pm b + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
On a une équivalence si tout élément possède au plus un antécédent par f, comme dans l'exemple qui suit.

Exemple IV.3. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons que $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$:*
- *si $a = b$: alors en appliquant la fonction $\exp$: $e^a = e^b$;*
- *si $e^a = e^b$: alors en appliquant la fonction $\ln$: $\ln(e^a) = \ln(e^b)$, c'est-à-dire $a = b$.*

Ce qui montre l'équivalence voulue.

Proposition IV.4. *La relation $\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication de la manière suivante :*

1. *si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a \leq b$ et $c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d$;*
2. *si $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $c \geq 0$: $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$;*
3. *si $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $c \leq 0$: $a \leq b \Rightarrow bc \leq ac$;*
4. *si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(0 < a \leq b$ et $0 < c \leq d) \Rightarrow 0 < ac \leq bd$.*

Remarque IV.5. *On ne divise ni ne soustrait des inégalités. On se ramène à des additions ou des multiplications en utilisant :*
- *si $a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$;*
- *si $a, b \in \mathbb{R}^*$ sont de même signe : $a \leq b \Leftrightarrow \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.*

Méthode IV.6. *Étant donnés deux réels a, b positifs :*

1. *pour majorer $a + b$, il suffit de majorer a et b ;*
2. *pour majorer $a - b$, il suffit de majorer a et de minorer b ;*
3. *pour majorer $a \times b$, il suffit de majorer a et b ;*
4. *pour majorer $\frac{a}{b}$, il suffit de majorer a et de minorer b.*

Et on a des résultats analogues pour les minorations.

Exemple IV.7. *Supposons que $a \in [1; 4]$ et $b \in [1/2; 3]$. Alors :*

1. $a + b \in [3/2; 7]$;
2. $a - b \in [-2; 7/2]$;
3. $a \times b \in [1/2; 12]$;
4. $\frac{a}{b} \in [1/3; 8]$.

Proposition IV.8. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors :*
— *$ab > 0$ si, et seulement si, a et b sont non nuls de même signe ;*
— *si $ab < 0$ si, et seulement si, a et b sont non nuls de signes opposés.*

Démonstration. Par disjonction de cas. □

Proposition IV.9. *Si $a_1, \dots, a_n$ sont des réels de même signe, alors :*

$$a_1 + \cdots + a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Démonstration. On montre séparément les deux implications :
$\Leftarrow$ si $a_1 = \cdots = a_n = 0$, alors on a bien $a_1 + \cdots + a_n = 0$;
$\Rightarrow$ Quitte à tout multiplier par -1 on peut supposer que les a_i sont positifs ou nuls.
Raisonnons par contraposée : on suppose que l'un des a_i est non nul, c'est-à-dire qu'il existe $i_0 \in [\![1; n]\!]$ tel que $a_{i_0} > 0$.
Mais comme tous les a_i sont positifs ou nuls, alors :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq a_{i_0} > 0$$

donc $a_1 + \cdots + a_n \neq 0$.

□

V La valeur absolue

Définition V.1. *Si $x \in \mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x, notée $|x|$ le réel :*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarques V.2.
1. *Une valeur absolue est toujours positive ou nulle.*
2. *Si $x \in \mathbb{R}$: $-|x| \leq x \leq |x|$, et l'une des deux inégalités est une égalité.*

Proposition V.3. *Si $x, y \in \mathbb{R}$:*

1. $|x| = \sqrt{x^2}$;
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3. *$|xy| = |x| \times |y|$ et $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ (pour $y \neq 0$) ;*
4. *$|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow (x = y$ ou $x = -y)$;*
5. *$|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$ et $|x| \geq y \Leftrightarrow x \geq y$ ou $x \leq -y$.*

Démonstration.

1. déjà vu avec les racines ;
2. découle du *1.* ;
3. découle du *1.* ;
4. On procède par disjonction de cas :
   — si x et y sont de même signe :
   $$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$$
   car, x et y ayant même signe, l'assertion $x = -y$ est soit fausse (donc ne change pas la valeur de vérité), soit vraie, mais alors $x = y = 0$, donc l'assertion $x = y$ est déjà vraie ;
   — si x et y sont de signes opposés :
   $$|x| = |y| \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow (x = -y \text{ ou } x = y)$$
   car, x et y ayant des signes opposés, l'assertion $x = y$ est soit fausse (donc ne change pas la valeur de vérité), soit vraie, mais alors $x = y = 0$, donc l'assertion $x = -y$ est déjà vraie ;
5. On procède par disjonction de cas :
   — si $x \geq 0$: alors $|x| = x$ et donc :
   $$|x| \leq y \Leftrightarrow 0 \leq x \leq y \Leftrightarrow -y \leq 0 \leq x \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y.$$
   — si $x \leq 0$: alors $|x| = -x$ et donc :
   $$|x| \leq y \Leftrightarrow 0 \leq -x \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq 0 \Leftrightarrow -y \leq x \leq y.$$
   ce qui prouve la première équivalence.
   On procède de même pour la seconde équivalence :
   — si $x \geq 0$:
   $$|x| \geq y \Leftrightarrow x \geq y \Leftrightarrow (x \geq y \text{ ou } x \leq -y)$$
   où la dernière équivalence vient du fait que :
   — si $y > 0$: alors $x \leq -y$ est fausse, donc ne change pas la valeur de vérité ;
   — si $y \leq 0$: alors $x \geq y$ est vraie, donc la valeur de $x \leq -y$ n'a pas d'incidence ;
   — si $x \leq 0$:
   $$|x| \geq y \Leftrightarrow -x \geq y \Leftrightarrow x \leq y \Leftrightarrow (x \geq y \text{ ou } x \leq -y)$$
   où la dernière équivalence vient du fait que :
   — si $y > 0$: alors $x \geq y$ est fausse, donc ne change pas la valeur de vérité ;
   — si $y \leq 0$: alors $x \leq -y$ est vraie, donc la valeur de $x \geq y$ n'a pas d'incidence ;

□

Remarques V.4.

1. *si $y < 0$, alors les équivalences dans 5 sont triviales (dans le sens où elles sont non seulement évidentes, mais qu'en plus elles n'apportent rien comme information) :*
   — l'inégalité $|x| \leq y$ sera toujours fausse, de même que l'inégalité $-y \leq x \leq y$ (car elle impliquerait que $-y \leq y$, qui est évidemment fausse) ;

— *l'inégalité $|x| \geq y$ sera toujours vraie, comme le fait que $x \geq y$ ou que $x \leq -y$. On a en effet :*

$$\begin{cases} x \geq y & \Leftrightarrow \quad x \in [y; +\infty[\\ x \leq -y & \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty; -y] \end{cases}$$

et l'union de ces deux intervalles forme bien toute la droite des réels.

2. *Si $y \geq 0$, on a même : $|x| \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$ et $|x| \geq y \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$.*
3. *Dans le point 5., on aurait pu déduire la seconde équivalence par négation de la première (en traitant à part le cas où $|x| = y$).*

Corollaire V.5. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > 0$, l'ensemble des réels x tels que $|x-a| \leq b$ est le segment $[a-b; a+b]$.*

Définition V.6. *Si $x, y \in \mathbb{R}$, la quantité $|x - y|$ est appelée* ***distance*** *entre x et y.*

Remarque V.7. *L'intervalle $[a - b; a + b]$ correspond à l'ensemble des réels à distance au plus b de a.*

Théorème V.8 (Inégalité triangulaire)**.** *Si $x, y \in \mathbb{R}$, alors :*

1. *$|x + y| \leq |x| + |y|$;*
2. *$||x| - |y|| \leq |x - y|$.*

De plus, il y a égalité dans les deux cas si, et seulement si, x et y sont de même signe.

Démonstration. 1. On utilise que $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$.
Donc : $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$.
D'où : $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2. On utilise l'inégalité précédente :

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$$

donc $|x| - |y| \leq |x - y|$.
En échangeant les rôles de x et y, on trouve : $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$.
Donc : $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$.
Et ainsi : $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Pour les égalités, on a :

$$|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow (x + y)^2 = (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow xy = |x| \times |y| = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

$$||x| - |y|| = |x - y| \Leftrightarrow (|x| - |y|)^2 \leq (x - y)^2 \Leftrightarrow |xy| = xy \Leftrightarrow xy \geq 0$$

Dans un cas comme dans l'autre, on a égalité si, et seulement si, $xy \geq 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, x et y sont de même signe. □

Remarque V.9. *Comme $|y| = |-y|$, on a plus synthétiquement :*

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

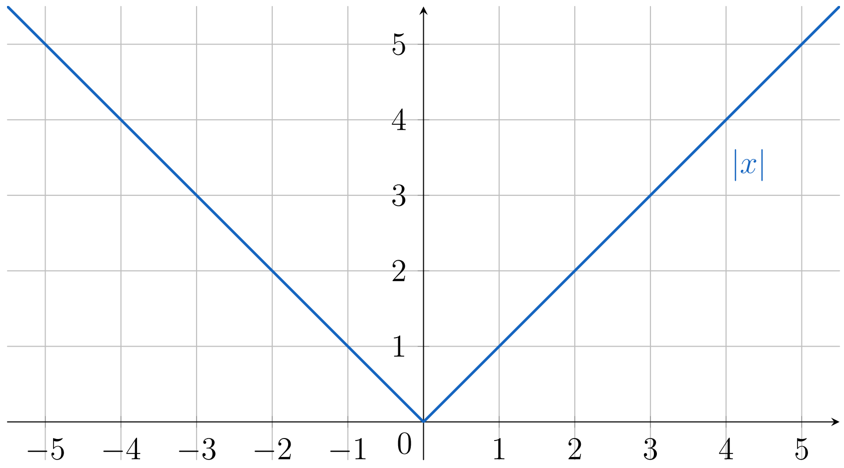
Corollaire V.10. *Si $x_1, \dots, x_n$ sont des réels, alors :*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| = |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

avec égalité si, et seulement si, tous les x_i sont de même signe.

Démonstration. Par récurrence. □

Proposition V.11. *La fonction $x \mapsto |x|$ a pour courbe représentative :*



VI La partie entière

Théorème-Définition VI.1. *Si $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.*
Cet entier n est le plus grand entier inférieur ou égal à x, et est appelé la ***partie entière*** *de x, notée $\lfloor x \rfloor$.*

Démonstration. Voir dans un autre chapitre. □

Proposition VI.2. *Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $n = \lfloor x \rfloor$ si, et seulement si : $x - 1 < n \leq x$.*

Démonstration. On applique directement la définition. Avec les mêmes notations, on a :

$$n = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow n \leq x < n+1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} n & \leq & x \\ x & < & n+1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} n & \leq & x \\ x-1 & < & n \end{array} \right. \Leftrightarrow x - 1 < n \leq x.$$

□

Remarques VI.3.

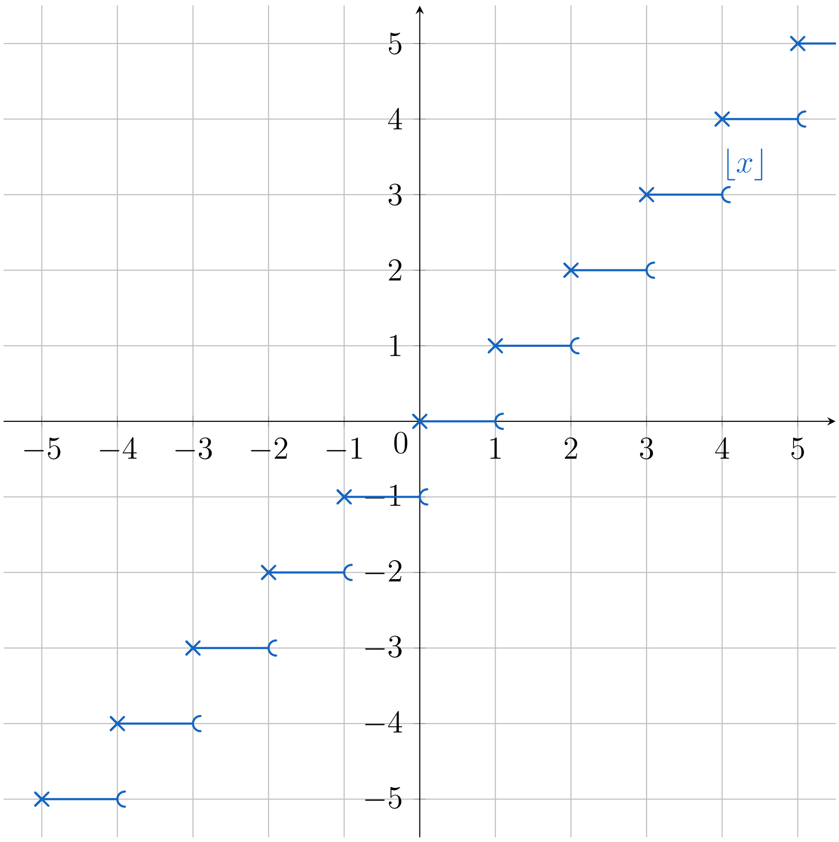
1. *La partie entière se lit bien sur les décimales* ***pour les nombres positifs*** *: $\lfloor 1,32 \rfloor = 1$ mais $\lfloor -1,32 \rfloor = -2$.*
2. *Pour manipuler ou faire apparaître des parties entières, on utilisera systématiquement l'une ou l'autre des inégalités précédentes.*

Exemple VI.4. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$, alors : $\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 = n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}$.*
Donc : $n^2 + 2 \leq \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 < n^2 + 3$.
Et ainsi : $\left\lfloor \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 \right\rfloor = n^2 + 2$.

Proposition VI.5. *Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors : $\lfloor x + n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.*

Démonstration. Par définition de $\lfloor x \rfloor$, on a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Donc, en rajoutant n : $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$.
Et, comme $\lfloor x \rfloor + n$ est un entier, on a bien le résultat voulu. □

Proposition VI.6. *La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ a pour courbe représentative :*



VII Équations et inéquations de degré 2 ou moins

Proposition VII.1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors l'équation $ax + b = 0$ admet pour unique solution le réel $-\frac{b}{a}$.*

Remarque VII.2. *Si $a = 0$, l'équation $ax + b = 0$ se réécrit $b = 0$, et donc :*
- *n'admet aucune solution si $b \neq 0$;*
- *admet tout réel pour solution si $b = 0$.*

Proposition VII.3. *Avec les mêmes notations, l'inéquation $ax + b > 0$ admet pour ensemble solution :*
- *l'intervalle $]-b/a; +\infty[$ si $a > 0$;*
- *l'intervalle $]-\infty; -b/a[$ si $a < 0$.*

Démonstration. Par manipulation d'égalité ou d'inégalité, en raisonnant par équivalence. □

Remarque VII.4. *Pour éviter les erreurs de signes, on peut regarder ce qui se passe en l'infini dans les inégalités, pour être sur de ne pas s'être trompé.*

Proposition VII.5. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:*
- *admet pour solutions réelles : $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta \geq 0$;*
- *n'admet pas de solution réelle si $\Delta < 0$.*

Démonstration. Avec les mêmes notations, on a :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right)$$

et on a ainsi :

— si $\Delta \geq 0$: on a les équivalences :

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

et on conclut par règle du produit nul ;

— si $\Delta < 0$: alors pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a\underbrace{\left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{\Delta}{(2a)^2}}_{>0}\right)}_{>0 \text{ donc } \neq 0} \neq 0$$

donc l'équation n'a pas de solution réelle.

$\square$

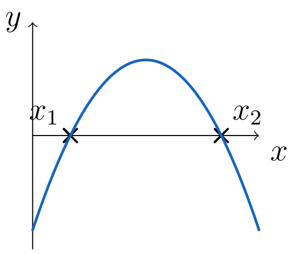
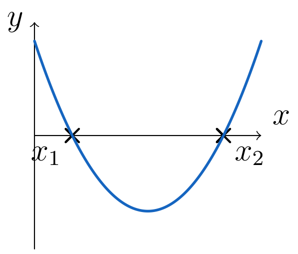
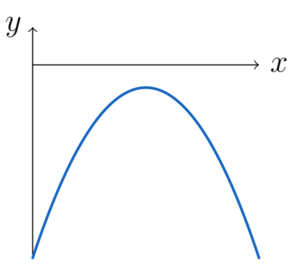
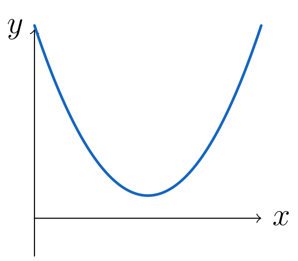
Remarque VII.6. *Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une seule solution, et on parle de solution double.*

Corollaire VII.7. *Avec les mêmes notations, si $\Delta \geq 0$ et que l'on note x_1, x_2 les solutions de $ax^2+bx+c = 0$ avec $x_1 \leq x_2$, alors :*

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

Proposition VII.8. *Avec les mêmes notations, la quantité $ax^2 + bx + c$ est :*

- *du signe de a sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$, du signe de $-a$ sur $]x_1, x_2[$ si $\Delta \geq 0$, et nulle seulement en x_1 et x_2 ;*
- *du signe de a sur $\mathbb{R}$ si $\Delta < 0$.*

<table>
<tr><th></th><th>$a < 0$</th><th>$a > 0$</th></tr>
<tr><td>$\Delta \geq 0$</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
$-$ 0 $+$ 0 $-$
</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
$+$ 0 $-$ 0 $+$
</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>$-\infty$ $+\infty$
$-$
</td><td>$-\infty$ $+\infty$
$+$
</td></tr>
</table>

Démonstration. Découle de l'écriture précédente. □

Remarque VII.9. *Là encore on peut regarder ce qui se passe en l'infini dans les inégalités, pour être sur de ne pas s'être trompé de signe.*

VIII Techniques de résolutions d'équations et d'inéquations

Exemple VIII.1. *Résolution de l'équation* $x = \sqrt{x+1}$.
À cause de la racine, on cherche les solution dans $[-1;+\infty[$*. Mais, comme on doit avoir* $x = \sqrt{x+1}$*, alors* x *aussi doit être positif. On cherche donc les solutions dans* $[0;+\infty[=\mathbb{R}_+$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$*, on a l'équivalence :*

$$x = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 = x+1$$

où la première équivalence est directement la définition de la racine carrée de $x+1$ *(l'unique réel positif dont le carré vaut* $x+1$*). On souhaite donc résoudre dans* $\mathbb{R}_+$ *l'équation* $x^2 - x - 1 = 0$.
On a une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 5$*. Donc les racines sont* $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On a bien que $x_1 \geq 0$*, mais* $x_2 < 0$ *n'est pas solution : donc l'équation admet pour unique solution* $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exemple VIII.2. *Résolution de l'équation* $2x^2 + 2xy - 2x + y^2 + 1 = 0$.
On a : $y^2 + 2xy + x^2 = (y+x)^2$ *et* $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.
Donc l'équation est équivalente à : $(y+x)^2 + (x-1)^2 = 0$.
Comme un carré (de réel) est positif, on a donc :

$$(y+x)^2 + (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (y+x)^2 = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -x = -1 \end{cases}$$

donc l'unique solution est $(x,y) = (1,-1)$.

Exemple VIII.3. *Résolution de l'inéquation* $\sqrt{x-1} \leq \sqrt{2x^2-5}$.
On a l'équivalence :

$$\sqrt{x-1} \leq \sqrt{2x^2-5} \Leftrightarrow 0 \leq x-1 \leq 2x^2-5$$

On traite séparément les deux inéquations :
- $0 \leq x-1 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1;+\infty[= S_1$ *;*
- $x - 1 \leq 2x^2 - 5 \Leftrightarrow 0 \leq 2x^2 - x - 4$ *: on reconnaît un trinôme du second degré, de coefficient dominant positif, qui est donc positif à l'extérieur de ses racines.*
  Ses racines sont $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{33}}{4}$ *et* $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{33}}{4}$*. Donc la deuxième inéquation a pour ensemble solution* $S_2 =]-\infty; \frac{1-\sqrt{33}}{4}] \cup [\frac{1+\sqrt{33}}{4}; +\infty[$.

Comme $\frac{1-\sqrt{33}}{4} < 1$ *et que* $\frac{1+\sqrt{33}}{4} > 1$*, on déduit que l'équation admet pour ensemble solution :*

$$S_1 \cap S_2 = \left[\frac{1+\sqrt{33}}{4}; +\infty\right[.$$

Exemple VIII.4. *Résolution de l'inéquation* $|x-1| \leq |2x-3|$.
Par propriétés des valeurs absolues, on a les équivalences :

$$|x-1| \leq |2x-3| \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq (2x-3)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x-2)(3x-4) \Leftrightarrow 0 \leq 3(x-2)(x-4/3) \Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{4}{3}] \cup [2;+\infty[.$$

où, pour la dernière équivalence, on reconnaît à nouveau un trinôme du second degré, de coefficient dominant positif, dont les racines sont $\frac{4}{3}$ *et* 2.
Et donc l'ensemble solution est : $]-\infty; \frac{4}{3}] \cup [2; +\infty[$.

Autre méthode : on peut procéder par disjonction de cas pour éliminer les valeurs absolues. On trouve alors les solutions selon les valeurs de x *:*

x	$]-\infty, 1]$	$[1, \frac{3}{2}]$	$[\frac{3}{2}, +\infty[$
$\|x-1\|$	$1-x$	$x-1$	$x-1$
$\|2x-3\|$	$3-2x$	$3-2x$	$2x-3$
$\|x-1\| \leq \|2x-3\|$	$1-x \leq 3-2x$ $\Leftrightarrow x \leq 2$	$x-1 \leq 3-2x$ $\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$	$x-1 \leq 2x-3$ $\Leftrightarrow x \geq 2$
S	$S_1 =]-\infty, 1]$	$S_2 = [1, \frac{4}{3}]$	$S_3 = [2, +\infty[$

Et on trouve finalement que : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]-\infty; \frac{4}{3}] \cup [2; +\infty[$.

Exemple VIII.5. *Résolution de l'équation* $\lfloor \frac{x^2}{3} - 2x + \frac{5}{3} \rfloor = -1$.
L'équation est équivalente à l'inéquation :

$$-1 \leq \frac{x^2}{3} - 2x + \frac{5}{3} < 0$$

dont on résout séparément les deux parties :

— *on procède par équivalences :*

$$\begin{aligned} -1 \leq \tfrac{x^2}{3} - 2x + \tfrac{5}{3} &\Leftrightarrow -3 \leq x^2 - 6x + 5 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 6x + 8 \end{aligned}$$

On a donc un trinôme du second degré, de coefficient dominant positif, de discriminant $\Delta = 4 = 2^2$, *dont les racines sont :* $\frac{6-2}{2} = 2$ *et* $\frac{6+2}{2} = 4$. *Donc finalement la première inégalité est vérifiée pour* $x \in]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[$.

— *on raisonne de la même manière :*

$$\tfrac{x^2}{3} - 2x + \tfrac{5}{3} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$$

On a encore un trinôme du second degré, de coefficient dominant positif, de discriminant $\Delta = 16 = 4^2$, *dont les racines sont :* $\frac{6-4}{2} = 1$ *et* $\frac{6+4}{2} = 5$. *Donc finalement la seconde inégalité est vérifiée pour* $x \in]1; 5[$.

Donc l'ensemble solution de l'équation est :

$$(]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[) \cap]1; 5[=]1; 2] \cup [4; 5[.$$

Chapitre 3

Rappels et compléments sur les fonctions numériques

I Généralités sur les fonctions

I.1 Domaine de définition

Définition I.1. *Si $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$,* ***fonction numérique*** *f* ***définie sur*** *$\mathcal{D}$ est la donnée pour tout élément $x \in \mathcal{D}$ d'un unique réel noté $f(x)$.*
L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé ***domaine de définition****.*
On notera alors : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$.

Remarque I.2. *En général, une fonction sera donnée par une formule : auquel cas, son domaine de définition est là où la formule a bien un sens.*

Exemple I.3. *Considérons la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.*
Alors la formule $f(x)$ n'a de sens que lorsque $4 - x^2 \geq 0$, c'est-à-dire que $\mathcal{D}_f = [-2; 2]$.

Définition I.4. *Si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et $A \subset \mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathcal{D}$, on définit la* ***restriction de*** *f* ***à*** *A comme la fonction notée $f|_A$ définie sur A qui coïncide avec f :*

$$f|_A : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

Inversement, on dit que f est un ***prolongement*** *de $f|_A$.*

Exemple I.5. *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}^2$ est la restriction de la fonction $x \mapsto x$ à $\mathbb{R}_+$.*

Définition I.6. *Si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et A est une partie de $\mathbb{R}$, on dit que f est* ***à valeurs dans*** *A si : pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in A$.*
On notera alors $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & A \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ au lieu de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$.

Exemple I.7. *La fonction $\sin$ est à valeurs dans $[-1; 1]$. Sa restriction à $[0; \pi]$ est à valeurs dans $[0; 1]$.*

Définition I.8. *Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans A, et g une fonction définie sur A. On dit alors que g et f sont* ***composables****, et on définit la* ***composée de*** *g* ***et*** *f comme la fonction notée $g \circ f$, définie sur $\mathcal{D}$ par :*

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g\left(f(x)\right) \end{array} \right. .$$

Exemple I.9. *La fonction* $f : x \mapsto x^2+1$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *est à valeurs dans* $[1;+\infty[$*. Donc elle est composable avec la fonction* $g : x \mapsto \sqrt{x-1}$*. Et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g \circ f(x) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Proposition I.10. *Si* f, g *sont deux fonctions définies sur un même ensemble* $\mathcal{D}$*, alors on peut définir les fonctions :*

1. ***somme*** *de* f *et* g*, notée* $f+g$*, définie par :* $f+g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.$ *;*
2. ***produit*** *de* f *et* g*, notée* fg*, définie par :* $fg : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\times g(x) \end{array} \right.$ *.*

On définit de même, pour $\lambda \in \mathbb{R}$*, la fonction* λf*.*

Si g *ne prend jamais de valeur nulle, on définit le* ***quotient*** *de* f *et* g*, notée* $\frac{f}{g}$*, par :* $\frac{f}{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right.$ *.*

I.2 Graphes, images et antécédents

Définition I.11. *Si* f *est une fonction définie sur* $\mathcal{D}$*, et* $x \in \mathcal{D}$*,* $y \in \mathbb{R}$ *tels que* $f(x) = y$*. On dit que :*

1. y *est* ***l'image*** *de* x *;*
2. x *est* ***un antécédent*** *de* y*.*

Remarque I.12. *Une image est unique, tandis qu'un réel peut avoir aucun, un, plusieurs ou une infinité d'antécédents.*

Exemple I.13. *On considère la fonction* cos *définie sur* $\mathbb{R}$*. Alors :*

1. *l'image de* $\frac{\pi}{2}$ *est* 0 *;*
2. *les antécédents de* 0 *sont les* $\frac{\pi}{2} + k\pi$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$ *;*
3. *tout* y *tel que* $|y| > 1$ *n'a pas d'antécédent.*

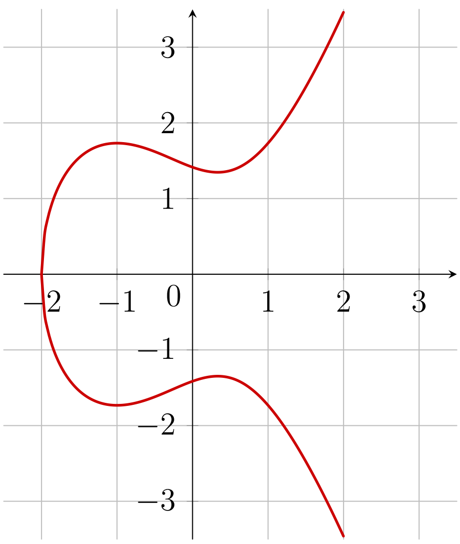
Définition I.14. *Si* f *est une fonction définie sur* $\mathcal{D}$*, son* ***graphe****, ou sa* ***représentation graphique****, est l'ensemble* $\mathcal{C}_f$ *défini par :*

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathcal{D}\}.$$

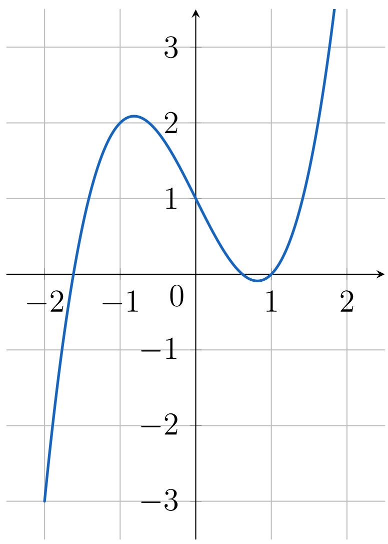
Remarque I.15. *Autrement dit, pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$(x,y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow x \in \mathcal{D} \text{ et } y = f(x)$$

donc, à abscisse donnée, il y a au plus un point sur le graphe.



Pas un graphe.



Un graphe.

I.3 Fonctions bornées

Définition I.16. *On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est **majorée** par $M \in \mathbb{R}$ si :*

$$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \leq M$$

*et on dit alors que M est un **majorant** de f.*
*On dit qu'elle est **minorée** par m si :*

$$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geq m$$

*et on dit alors que m est un **minorant** de f.*
On dit enfin que f est bornée si elle est majorée et minorée.

Remarques I.17.

1. *Graphiquement, cela se voit : la courbe de f est limitée en ordonnée (vers le haut, vers le bas ou les deux).*
2. *S'il existe, un majorant (ou un minorant) n'est jamais unique.*

Définition I.18. *On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ possède un **maximum** (resp. **minimum**) en $x \in \mathcal{D}$ si $f(x)$ est un majorant (resp. un minorant) de f.*
*On dit plus généralement que f a un **extremum** en x si elle atteint son maximum ou son minimum en x.*

Exemples I.19.

1. *la fonction $x \mapsto x^2$ est minorée (elle admet même 0 pour minimum), mais n'est pas majorée ;*
2. *la fonction $x \mapsto e^x$ est minorée (par 0), mais non majorée ; et elle n'admet pas de minimum ;*
3. *la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est bornée ; elle admet 1 comme maximum et -1 comme minimum, qui sont respectivement atteints en tous les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.*

Proposition-Définition I.20. *Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, son maximum, s'il existe, est unique. On l'appellera donc **le** maximum de f.*
Il en est de même pour le minimum.

Démonstration. Supposons que f possède un maximum atteint en a et en b, pour $a, b \in \mathcal{D}$. Alors :
- comme f atteint son maximum en a : $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \leq f(a)$. En particulier, pour $x = b$, on trouve : $f(b) \leq f(a)$.
- comme f atteint son maximum en b : $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \leq f(b)$. En particulier, pour $x = a$, on trouve : $f(a) \leq f(b)$.

Et ainsi : $f(a) = f(b)$, ce qui assure l'unicité (sous réserve d'existence).
L'unicité du minimum se montre de même. □

Remarque I.21. *Il se peut en revanche que le maximum ou le minimum soit atteint en différents éléments de $\mathcal{D}$. Par exemple, la fonction $\sin$ atteint son maximum (à savoir 1) en tous les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Proposition I.22. *La fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est bornée si, et seulement si, la fonction $|f| : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |f(x)| \end{array} \right.$ est majorée.*

Démonstration.
- si $|f|$ est majorée par M : alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|f(x)| \leq M$, et donc : $-M \leq f(x) \leq M$, donc f est bornée (minorée par $-M$ et majorée par M) ;
- réciproquement : si f est minorée par m et majorée par M, alors : $\forall x \in \mathcal{D},\ m \leq f(x) \leq M$. Et donc : $\left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & \leq & M \\ -f(x) & \leq & -m \end{array} \right.$ donc $|f|$ est majorée par $\max(M, -m)$.

□

I.4 Monotonie

Définition I.23 (Fonction monotone)**.** *Si f est définie sur $\mathcal{D}$, on dit que f est :*

1. ***croissante*** *si pour tous $x, y \in \mathcal{D}$: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;*
2. ***strictement croissante*** *si pour tous $x, y \in \mathcal{D}$: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;*
3. ***décroissante*** *si pour tous $x, y \in \mathcal{D}$: $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;*
4. ***strictement décroissante*** *si pour tous $x, y \in \mathcal{D}$: $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;*
5. ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante ;*
6. ***strictement monotone*** *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Remarque I.24. *Pour appliquer une fonction à une inégalité, on a besoin de connaître sa monotonie. La stricte monotonie est même nécessaire si on veut manipuler des inégalités strictes, ou si on veut raisonner avec des équivalences.*

Exemples I.25.

1. *La fonction* exp *est croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$: elle n'est en revanche pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car :*
$$-1 < 1 \text{ et } \frac{1}{-1} = -1 \leq 1 = \frac{1}{1}.$$
3. *La fonction $x \mapsto x^2$ est :*
   — *strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ car :*
$$x < y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -y < -x \Rightarrow 0 \leq y^2 < x^2$$
   — *strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ car :*
$$0 \leq x < y \Rightarrow 0 \leq x^2 < y^2$$
   où dans chaque cas on a multiplié par elle-même une inégalité dont tous les termes étaient positifs (ce qui est parfaitement licite).

Proposition I.26. *Si f a pour graphe $\mathcal{C}_f$, alors :*

1. *f est croissante si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ "monte" quand on va vers la droite ;*
2. *f est décroissante si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ "descend" quand on va vers la droite.*

Remarque I.27. *La monotonie se comporte assez mal avec la somme, mais très mal avec les produits (comme les inégalités en général).*

Proposition I.28. *Si f et g sont deux fonctions composables monotones, alors $g \circ f$ est aussi monotone, et elle est :*

1. *croissante si f et g ont même monotonie ;*
2. *décroissante sinon.*

De plus, si f et g sont strictement monotones, alors $g \circ f$ aussi.

Remarque I.29. *Dans le cas de stricte monotonie, on a bien besoin de la stricte monotonie de f et de g. Par exemple, si f ou g est constante, alors $f \circ g$ est constante donc ne peut pas être strictement monotone.*

Démonstration.
Soient $x, y \in \mathcal{D}$ avec $x \leq y$:

- si f est croissante : alors : $f(x) \leq f(y)$ et donc :
  - si g est croissante : $g(f(x)) \leq g(f(y))$;
  - si g est décroissante : $g(f(x)) \geq g(f(y))$;
- si f est décroissante : alors : $f(x) \geq f(y)$ et donc :
  - si g est croissante : $g(f(x)) \geq g(f(y))$;
  - si g est décroissante : $g(f(x)) \leq g(f(y))$;

Ce qui montre bien les cas de monotonie.
La stricte monotonie de montre de la même manière, en considérant partout des inégalités strictes. □

I.5 Bijections

Définition I.30. *Si I et J sont deux parties de $\mathbb{R}$, on dit qu'une fonction $f : I \to J$ réalise **une bijection de I sur J** si tout élément de J admet **un unique antécédent** par f dans I.*
On note alors f^{-1} la fonction définie sur J qui à tout $y \in J$ associe son unique antécédent par f.
*La fonction f^{-1} est appelée **bijection réciproque** de f.*

Exemple I.31.

1. *La fonction $x \mapsto e^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$: sa réciproque est la fonction :*

$$\ln : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \right. .$$

2. *La fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est bijective, et sa bijection réciproque est la fonction racine carrée.*
   La fonction $x \mapsto x^2$ réalise aussi une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $\mathbb{R}_+$, mais alors sa bijection réciproque est $x \mapsto -\sqrt{x}$.

Remarque I.32. *Pour $f : I \to J$ bijective, on a :*

$$\forall x \in I,\ \forall y \in J,\ f(x) = y \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$$

et étudier la bijectivité de f revient à étudier l'équation $f(x) = y$, et étudier son nombre de solution :

- *on restreint l'ensemble d'arrivée (les y) pour que tout élément y ait au moins une solution ;*
- *puis on restreint l'ensemble de départ (les x) pour que tout y ait au plus une solution.*

Exemple I.33. *Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{x-2} \end{array} \right.$.*
Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminons les antécédents de y :

$$\begin{array}{rcl} y = f(x) & \Leftrightarrow & y = \dfrac{x+1}{x-2} \\ & \Leftrightarrow & (x-2)y = x+1 \\ & \Leftrightarrow & x(y-1) = 2y+1 \end{array}$$

et donc :

- *si $y = 1$: y n'a pas d'antécédent ;*
- *si $y \neq 1$: y a pour unique antécédent $x = \frac{2y+1}{y-1}$.*

Donc f n'est pas bijective de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sur $\mathbb{R}$. Mais elle l'est de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et sa bijection réciproque est :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ y & \mapsto & \frac{2y+1}{y-1} \end{array} \right.$$

Définition I.34. *Si I est une partie de $\mathbb{R}$, on définit la **fonction identité sur I**, notée id_I, comme la fonction définie sur I par : $\forall x \in I,\ \mathrm{id}_I(x) = x$.*

Proposition I.35. *Si $f : I \to J$ est bijective, alors :*

1. $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_J$;
2. $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_I$;
3. f^{-1} *réalise une bijection de J sur I, avec $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Démonstration.

1. Si $y \in J$, comme $f^{-1}(y)$ est un antécédent de y par f (c'est même le seul), alors $f(f^{-1})(y) = y$;
2. Si $x \in I$, alors $f(x)$ est l'image de x par f, donc x est l'unique antécédent de $f(x)$; mais $f^{-1}(f(x))$ aussi, donc $x = f^{-1}(f(x))$;
3. Soit $x \in I$. Procédons par analyse-synthèse pour déterminer les antécédents de x par f^{-1} dans J :
   — analyse : soit $y \in J$ un antécédent de x par f^{-1}. Alors $f^{-1}(y) = x$. Et en composant par f, par le point *1.*, il vient : $f(x) = f \circ f^{-1}(y) = y$, ce qui assure l'unicité d'un antécédent.
   — synthèse : par le point *2.* : $f^{-1}(f(x)) = x$, donc $f(x)$ est bien un antécédent de x, ce qui assure l'existence.
   Donc tout élément de I admet un unique antécédent par f^{-1} dans J, et cet élément est $f(x)$, ce qui montre bien que f^{-1} est bijective, de bijection réciproque f.

□

Proposition I.36. *Si f est strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$.*
De plus, sa réciproque f^{-1} a même monotonie que f.

Démonstration. Supposons par exemple que f est strictement croissante.
Soit $y \in J$: alors il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$ par définition de J, donc y a un antécédent.
Soient x_1, x_2 sont deux antécédents de y. Quitte à échanger x_1 et x_2, on peut supposer que $x_1 \leq x_2$. Si $x_1 < x_2$, alors $y = f(x_1) < f(x_2) = y$ par monotonie, ce qui est impossible. Donc $x_1 = x_2$
Donc y a un unique antécédent, et f est bijective.
Soient $y_1, y_2 \in J$ tels que $y_1 < y_2$. Notons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ pour $x_1, x_2 \in I$. Nécessairement on a : $x_1 < x_2$ (car $x_1 \geq x_2$ impliquerait que $y_1 \geq y_2$). Mais $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$.
Donc f^{-1} est strictement croissante.
Le cas où f est strictement décroissante se montre de la même manière. □

Remarque I.37. *Une bijection n'est pas nécessairement monotone. En revanche :*
— *si elle est monotone, elle l'est strictement.*
— *de manière plus subtile, si elle est continue et définie sur un intervalle, elle est strictement monotone.*

II Fonctions affines

Définition II.1. *Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une relation du type :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$$

*où $a, b \in \mathbb{R}$ sont respectivement la **pente** et l'**ordonnée à l'origine** de la fonction f.*

Remarques II.2.

1. *Les fonctions constantes sont des fonctions affines : ce sont exactement celles de pente nulle.*
2. *Une fonction affine est dite **linéaire** si son ordonnée à l'origine est nulle.*

Proposition II.3. *Les fonctions affines sont exactement les fonctions dont les graphes sont des droites. Réciproquement, toute droite non verticale du plan est le graphe d'une (unique) fonction affine. De plus, la fonction considérée est linéaire si, et seulement si, la droite associée passe par l'origine.*

Démonstration. Si f est une fonction affine, notons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto ax + b$. Alors le graphe de f est l'ensemble :

$$\mathcal{C}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax - y = b\}$$

qui est bien l'équation d'une droite (non verticale comme le coefficient devant y est non nul).
Réciproquement, considérons une droite D non verticale, et notons $\alpha x + \beta y = \gamma$ une équation de D. Comme cette droite est non verticale, alors nécessairement $\beta \neq 0$. Et donc :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y = \gamma\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}\}$$

qui est donc le graphe de la fonction affine : $f : x \mapsto -\dfrac{\alpha}{\beta}x + \dfrac{\gamma}{\beta}$.
Enfin, avec les mêmes notations on a :

$$(0,0) \in D \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 0 + b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

ce qui donne bien l'équivalence voulue. □

Proposition II.4. *Étant donnés deux points $M(x_1, y_1)$ et $N(x_2, y_2)$ distincts et non verticalement alignés, la droite (MN) est le graphe de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ avec :*

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ et } b = y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Démonstration. Avec les notations précédentes, on a le système suivant :

$$\begin{cases} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \end{cases}$$

d'inconnues a et b :
— en soustrayant les deux équations : on obtient $y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2)$, ce qui donne la bonne valeur de a ; le fait que M, N ne soient pas verticalement alignés assure au passage que $x_1 \neq x_2$, et donc $x_1 - x_2 \neq 0$;
— en réinjectant la valeur de a, on déduit b.

□

Remarque II.5. *La droite (MN) étant aussi la droite (NM), il est rassurant de voir que a et b ne changent pas quand on inverse les indices dans les expressions précédentes.*

Proposition II.6. *Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. Alors :*
— *si $a = 0$: f est constante ;*
— *si $a > 0$: f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;*
— *si $a < 0$: f réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
De plus, dans les deux derniers cas, la bijection réciproque de f est :

$$f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

Démonstration. Le cas $a = 0$ est immédiat.
Traitons le cas $a > 0$ pour la monotonie. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x_1 < x_2 \underset{a>0}{\Rightarrow} ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ce qui assure bien que f est strictement croissante.
Le cas $a < 0$ se traite de même.
Pour la bijection réciproque, considérons $x, y \in \mathbb{R}$ et supposons que $a \neq 0$. Alors :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = ax + b \Leftrightarrow y - b = ax \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}.$$

Ce qui assure bien la bijectivité de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec la bonne bijection réciproque. □

Remarque II.7. *On note au passage que la réciproque d'une fonction affine (de pente $a \neq 0$) est aussi une fonction affine (de pente $\frac{1}{a}$). Plus généralement, on peut voir que : la composée, la somme, la différence ou la multiplication par une constante de fonctions affines sont aussi des fonctions affine.*

III Tracé d'une fonction

III.1 Symétries

Proposition III.1. *Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, de graphe $\mathcal{C}_f$ dans le plan muni du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et $a \in \mathbb{R}$. Alors :*

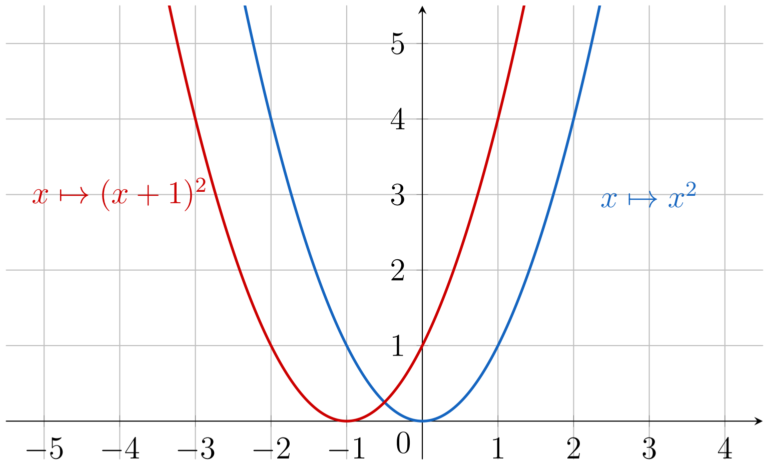
1. *le graphe de $x \mapsto f(x) + a$ est le translaté de $\mathcal{C}_f$ par le vecteur $a\overrightarrow{j}$;*
2. *le graphe de $x \mapsto f(x + a)$ est le translaté de $\mathcal{C}_f$ par le vecteur $-a\overrightarrow{i}$;*
3. *le graphe de $x \mapsto af(x)$ est le dilaté de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité orthogonale $(x, y) \mapsto (x, ay)$;*
4. *si $a \neq 0$, le graphe de $x \mapsto f(ax)$ est le dilaté de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité orthogonale $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{a}, y\right)$.*

Démonstration.

1. On note $g : x \mapsto f(x) + a$. Alors, si $x \in \mathcal{D}$, on a :
$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y + a = f(x) + a \Leftrightarrow y + a = g(x) \Leftrightarrow (x, y + a) \in \mathcal{C}_g$$
2. On note $g : x \mapsto f(x + a)$. Alors, si $x \in \mathcal{D}$, on a :
$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f((x - a) + a) \Leftrightarrow y = g(x - a) \Leftrightarrow (x - a, y) \in \mathcal{C}_g$$
3. On note $g : x \mapsto af(x)$. Alors, si $x \in \mathcal{D}$, on a :
$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{g(x)}{a} \Leftrightarrow ay = g(x) \Leftrightarrow (x, ay) \in \mathcal{C}_g.$$
4. On note $g : x \mapsto f(ax)$. Alors, si $x \in \mathcal{D}$, on a :
$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = g\left(\frac{x}{a}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}, y\right) \in \mathcal{C}_g.$$

□

Remarque III.2. *Il faut bien faire attention au signe "$-$" et au fait qu'il faut diviser par a dans les cas 2 et 4. Par exemple, pour le cas 2, on représente ci-dessous la fonction $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto (x + 1)^2$: la deuxième est bien l'image de la première par la translation de vecteur $-\overrightarrow{i}$.*



Définition III.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est :*

1. ***paire*** *si : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$;*
2. ***impaire*** *si : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$;*
3. ***périodique*** *s'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$. Et on dit alors que f est T-périodique, ou que T est une période de f.*

Remarques III.4.

1. *On peut étendre les définitions à des fonctions définies sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$: il faudra faire attention que $-x \in \mathcal{D}$ ou que $x + T \in \mathcal{D}$.*
2. *Une fonction T-périodique est aussi (kT)-périodique pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Et il sera plus intéressant de chercher un T aussi petit que possible.*
3. *Si f est impaire, alors $f(0) = 0$.*

Proposition III.5. *Si f a pour graphe $\mathcal{C}_f$:*

1. *f est paire si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;*
2. *f est impaire si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du plan ;*
3. *f est T-périodique si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est invariant par translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$.*

Proposition III.6. *Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire g et d'une fonction impaire h.*
Plus précisément, g et h sont définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Démonstration. Voir chapitre 1. □

Proposition III.7. *Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de graphe $\mathcal{C}_f$, et $a, b \in \mathbb{R}$:*

1. *si pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(a-x) = f(x)$, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \dfrac{a}{2}$;*
2. *si pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(a-x) = b - f(x)$, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point $(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2})$.*

Démonstration. 1. On considère $g : x \mapsto f(a-x)$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in \mathcal{C}_f & \Leftrightarrow & y = f(x) \\ & \Leftrightarrow & y = f(a-(a-x)) \\ & \Leftrightarrow & y = g(a-x) \\ & \Leftrightarrow & (a-x, y) \in \mathcal{C}_g \end{array}$$

Et donc $\mathcal{C}_g$ est l'image par $\mathcal{C}_f$ de l'application $(x, y) \mapsto (a - x, y)$, qui n'est autre que la symétrie axiale considérée.
Le résultat se déduit du cas où $f = g$.

2. On considère $g : x \mapsto b - f(a - x)$. Alors :

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathcal{C}_f &\Leftrightarrow y = f(x)\\ &\Leftrightarrow y = f(a - (a - x))\\ &\Leftrightarrow b - y = b - f(a - (a - x))\\ &\Leftrightarrow b - y = g(a - x)\\ &\Leftrightarrow (a - x, b - y) \in \mathcal{C}_g\end{aligned}$$

Et donc $\mathcal{C}_g$ est l'image par $\mathcal{C}_f$ de l'application $(x, y) \mapsto (a - x, b - y)$, qui n'est autre que la symétrie centrale considérée.
Le résultat se déduit du cas où $f = g$.

□

Proposition III.8. *Si f est bijective, alors le graphe de f^{-1} est l'image du graphe de f par la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.*

Démonstration. Découle des équivalences : $(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$. □

Remarque III.9. *Les symétries permettent de réduire l'**ensemble d'étude** de f (c'est-à-dire l'ensemble sur lequel on va étudier f pour pouvoir la connaître entièrement) :*
- *si f a une symétrie (axiale ou centrale), on peut "couper en deux" l'ensemble de définition ;*
- *si f est T-périodique : on peut restreindre l'ensemble sur un intervalle (quelconque) de longueur T.*

Exemple III.10. *Commençons l'étude de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\sin(x)^3$. Alors f vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$:*
- $f(2\pi + x) = \cos(2\pi + x)\sin(2\pi + x)^3 = \cos(x)\sin(x)^3 = f(x)$, *donc f est 2π-périodique ;*
- $f(-x) = \cos(-x)\sin(-x)^3 = -\cos(x)\sin(x)^3 = -f(x)$, *donc f est impaire ;*
- $f(\pi - x) = \cos(\pi - x)\sin(\pi - x)^3 = -\cos(x)\sin(x)^3 = -f(x)$, *donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point $(\frac{\pi}{2}, 0)$.*

Donc on peut se contenter d'étudier f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On remonte alors à $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ entier en faisant une symétrie centre par rapport à $(\frac{\pi}{2}, 0)$, puis une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis des translations de $\pm 2\pi \overrightarrow{i}$.
On pouvait aussi remarquer que f est π-périodique, mais cela ne rajoute rien aux symétries précédentes.

III.2 Asymptotes

Définition III.11. *Soit f définie sur un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$).*
*On dit que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est **asymptote** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$).*
*On parle d'**asymptote horizontale** lorsque $a = 0$, et d'**asymptote oblique** sinon.*
*On dit que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = A$ est **asymptote** à $\mathcal{C}_f$ si $\lim_{x\to A^+} f(x) = \pm\infty$ (resp. $\lim_{x\to A^-} f(x) = \pm\infty$).*
*On parle alors d'**asymptote verticale**.*

Proposition III.12. *La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ si, et seulement si :*

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b \end{cases}$$

et pareil en $-\infty$.

Démonstration. Supposons que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote. Alors, sous réserve que les limites ci-dessous existent bien :

— comme $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-(ax+b)}{x} + \frac{ax+b}{x}$, alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)-ax-b}{x} + \frac{ax+b}{x} \right) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-ax-b}{x}}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \left(a + \frac{b}{x} \right)}_{=a} = a$$

où l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ est assurée par les deux dernières limites ;

— comme $(f(x) - ax) = (f(x) - (ax + b)) + b$, alors de même :

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b) + b) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b))}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} (b)}_{=b} = b$$

où l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$ est assurée par les deux dernières limites ;

ce qui donne la première implication.

Pour la réciproque, il suffit de considérer la seconde limite. On a alors :

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)}_{=b} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} (-b)}_{=-b} = b - b = 0.$$

□

Remarques III.13.

1. *Ce résultat permet de chercher l'équation d'une asymptote en cherchant séparément (et dans cet ordre) le coefficient directeur (c'est-à-dire a) et l'ordonnée à l'origine (c'est-à-dire b). Il assure aussi l'unicité de l'asymptote (par unicité de la limite).*

2. *Si jamais $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ on a une branche parabolique d'axe vertical, comme c'est par exemple le cas pour les fonctions $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto x^2$.*

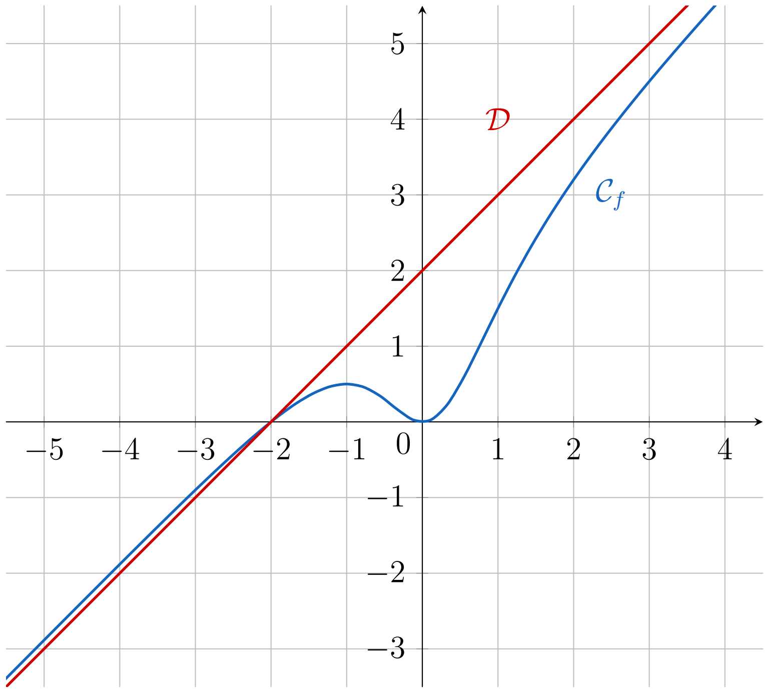
3. *Si jamais $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ mais que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, on a alors un branche parabolique oblique d'axe $\Delta : y = ax$, comme c'est par exemple le cas pour les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ ou $x \mapsto \sqrt{x}$.*

Exemple III.14. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}$.*

— *pour $x \neq 0$:* $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^3 + x} = \dfrac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \underset{x\to\pm\infty}{\to} 1$;

— $f(x) - x = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} = \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \underset{x\to\pm\infty}{\to} 2$

donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.



IV Continuité et dérivation

Les principaux résultats seront démontrés dans un autre chapitre.

IV.1 Continuité

Définition IV.1. *Si f est une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$, on dit que f est **continue en** a si : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*
*Si f est continue en tout point $a \in I$, on dira qu'elle est **continue sur** I.*

Proposition-Définition IV.2. *Soient I est un intervalle, $a \in I$, et f définie sur $I \setminus \{a\}$ telle que : $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Alors f est **prolongeable par continuité en** a.*
La fonction g définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ b & \text{si } x = b \end{cases}$$

est un prolongement de f continu en a.

Exemples IV.3.

1. *La fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0, car : $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, en reconnaissant la limite du taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre x et 0.*
2. *La fonction $f : x \mapsto x \cdot \sin(\ln(x))$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et est prolongeable par continuité en 0 car : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (par encadrement).*

Théorème IV.4 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Si f est continue sur un intervalle I, et $a, b \in I$, tout élément entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un antécédent par f entre a et b.*

Remarque IV.5. *Autrement dit : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Exemple IV.6. *Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ continue. Alors f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x)x$.*
Posons $g = f - \mathrm{id}$. Pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

On cherche donc à montrer que g s'annule, ce qui découle du théorème des valeurs intermédiaires, comme :
- *$g = f - \mathrm{id}$ est continue (différence de fonctions continues) sur l'intervalle $[0;1]$;*
- *$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ (comme $f(0) \in [0;1]$) ;*
- *$f(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (comme $f(1) \in [0;1]$).*

Et on a donc bien un point fixe pour f. En revanche, on n'a pas l'unicité en général, par exemple la fonction id possède tout élément de $[0;1]$ comme point fixe.

IV.2 Dérivabilité et dérivée

Définition IV.7. *Si f est une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$, on appelle **taux d'accroissement** de f en a la fonction :*

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right. .$$

*Si $\lim\limits_{x \to a} \tau_a(x)$ existe et est finie, on dit que f est **dérivable en** a, et on définit son **nombre dérivé** en a par : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \tau_a(x)$.*
*Si f est dérivable en tout point $a \in I$, on dira qu'elle est **dérivable sur** I, et la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée sa **fonction dérivée**.*

Remarques IV.8.

1. *Pour faciliter les calculs, on écrira plutôt : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.*
2. *Le nombre $\tau_a(x)$ est le coefficient directeur de la droite passant par les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses a et x.*
3. *On notera parfois $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$ pour $f'(x)$ lorsque l'on voudra mettre en évidence que l'on dérive par rapport à x (lorsque l'expression $f(x)$ fait apparaître d'autres variables que x).*

Exemples IV.9.

1. *la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $a, h \in \mathbb{R}$, on a :*
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h \underset{h \to 0}{\to} 2a$$
et ainsi $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \right.$;
2. *la fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, car son taux d'accroissement en 0 est défini par :*
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \tau_0(x) = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \left\{ \begin{array}{cl} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$
qui n'admet pas de limite quand $x \to 0$.

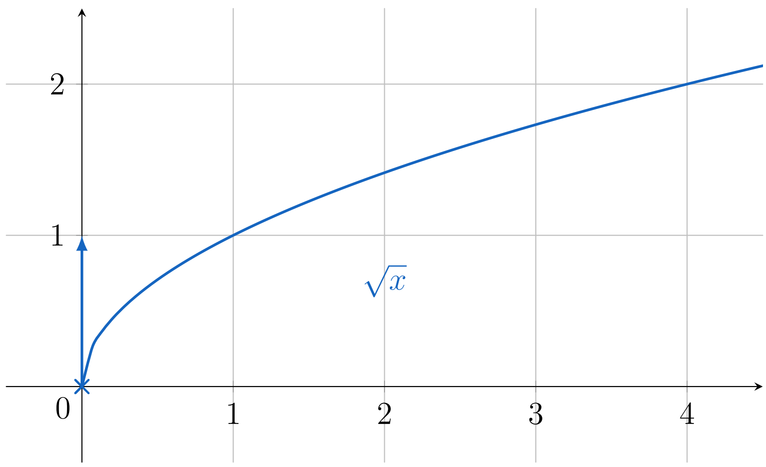
Théorème IV.10. *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Définition IV.11. *Si f est dérivable en a, la* ***tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse*** *a est la droite passant $(a, f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$, c'est-à-dire la droite d'équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.*

Remarque IV.12. *Si f n'est pas dérivable en a, mais que $\lim\limits_{x \to a} \tau_a(x) = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet pour tangente en a la droite verticale passant par $(a, f(a))$, c'est-à-dire la droite d'équation : $x = a$.*
Par exemple, pour la fonction racine, le taux d'accroissement entre 0 et $h > 0$ est :

$$\tau_0(h) = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h - 0} = \frac{1}{\sqrt{h}} \underset{h \to 0}{\to} +\infty$$

donc la fonction racine admet une (demi-)tangente verticale en 0, ce qu'on voit bien sur le tracé suivant :



Proposition IV.13. *Si f, g sont dérivables sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a les fonctions dérivées suivantes :*

1. *$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$ (la dérivation est linéaire) ;*
2. *$(fg)' = f'g + fg'$;*
3. *si g ne s'annule pas : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$;*
4. *si g ne s'annule pas : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.*

Théorème IV.14. *Soient I, J deux intervalles, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable, de dérivée :*

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \times g'(f(x)) \end{array} \right. .$$

Corollaire IV.15. *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors :*

1. *si $n \in \mathbb{N}$, alors $u^n : x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable sur I avec : $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$;*
2. *si u ne s'annule pas et $n \in \mathbb{Z}$, alors u^n est dérivable sur I avec : $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$;*
3. *la fonction $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I avec : $(e^u)' = u' \times e^u$;*
4. *si u est à valeurs strictement positives, $\ln(u) : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable avec : $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.*

Démonstration. On utilise la dérivée d'une composée. □

Remarque IV.16. *On peut renforcer le dernier résultat : si u ne s'annule pas, alors $\ln(|u|)$ est dérivable avec $(\ln(|u|))' = \dfrac{u'}{u}$.*

Exemple IV.17. *La fonction* $f : x \mapsto \left(\ln(x^2+1)\right)^2$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *:*

— *comme* $u : x \mapsto x^2+1$ *est dérivable et positive sur* $\mathbb{R}$*, alors* $\ln(u)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée :* $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{x^2+1}$ *;*

— *donc* $f = (\ln(u))^2$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, avec pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$f'(x) = \frac{4x}{x^2+1} \times \ln(x^2+1).$$

IV.3 Variations d'une fonction dérivable

Proposition IV.18 (Monotonie et dérivée)**.** *Si* f *est dérivable sur un* ***intervalle*** I*, alors :*

1. *si* f' *est positive ou nulle,* f *est croissante ;*
2. *si* f' *est négative ou nulle, alors* f *est décroissante.*

Proposition IV.19. *Si* ***de plus*** f' *ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur* I*, alors* f *est strictement monotone.*

Remarque IV.20. *Le résultat ne tient pas si* I *n'est pas un intervalle. Par exemple la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *a pour dérivée* $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ *qui est toujours négative, mais n'est pas décroissante sur* $\mathbb{R}^*$.

Exemple IV.21. *Reprenons la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \cos(x)\sin(x)^3$ *: elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée en* x *:*

$$f'(x) = -\sin(x)^4 + 3\cos(x)^2\sin(x)^2 = \sin(x)^2\left(4\cos(x)^2 - 1\right)$$

donc on déduit que sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ *:*

— f' *s'annule en* 0 *et* $\dfrac{\pi}{3}$ *;*

— f' *est strictement positive sur* $\left]0; \dfrac{\pi}{3}\right[$ *;*

— f' *est strictement négative sur* $\left]\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

D'où les variations suivantes :

x	0		$\pi/3$		$\pi/2$
f'	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	0

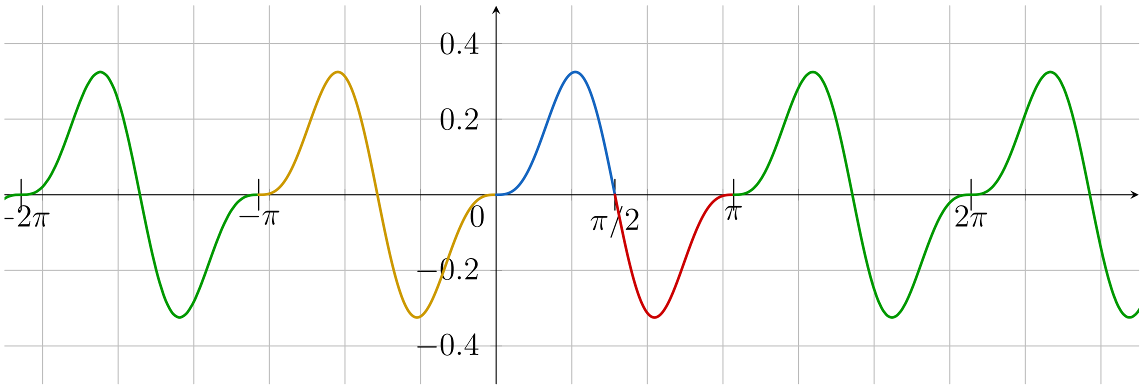
On trouve le tracé ci-dessous, où on fait :

— *le tracé en bleu (par l'étude précédente) ;*

— *le tracé en rouge (par symétrie centrale) ;*

— *le tracé en orange (par symétrie axiale) ;*

— *le tracé en vert (par translation).*



Corollaire IV.22. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si, et seulement si, f' est nulle.*

Démonstration. Si f est constante, son taux d'accroissement est toujours nul, donc sa dérivée aussi.
Si f' est nulle, alors f est à la fois croissante et décroissante. Ainsi, si $x, y \in I$ avec $x \leq y$, alors : $f(x) \leq f(y)$ et $f(x) \geq f(y)$, donc $f(x) = f(y)$ et f est constante. □

IV.4 Dérivées d'ordre supérieur

Définition IV.23. *Si f est définie sur I et $n \in \mathbb{N}$, on définit la **dérivée n-ème** de f (ou **dérivée d'ordre n**) comme :*

$$f^{(n)} = \begin{cases} f & \text{si} \quad n = 0 \\ \left(f^{(n-1)}\right)' & \text{si} \quad n \geq 1 \text{ et que } f^{(n-1)} \text{ est dérivable} \end{cases}$$

Si $f^{(n)}$ est bien définie, on dira que f est n-fois dérivable.
*Si f est n-fois dérivable pour tout entier naturel n, on dira que f est **infiniment dérivable**.*

Définition IV.24. *On note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.*
*Si $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que f est **de classe $\mathcal{C}^k$ sur** I si f est k-fois dérivable sur I et que $f^{(k)}$ est continue sur I. On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*
Enfin, on note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur I, c'est-à-dire des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier naturel k.

Remarque IV.25. *Comme une fonction dérivable est continue, les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont exactement les fonctions infiniment dérivables.*

Exemple IV.26. *La fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée n'est pas continue en 0.*

IV.5 Continuité et dérivabilité des fonctions réciproques

Théorème IV.27 (de la bijection monotone). *Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.*
De plus, J est un intervalle et f^{-1} est continue et de même monotonie que f sur J.

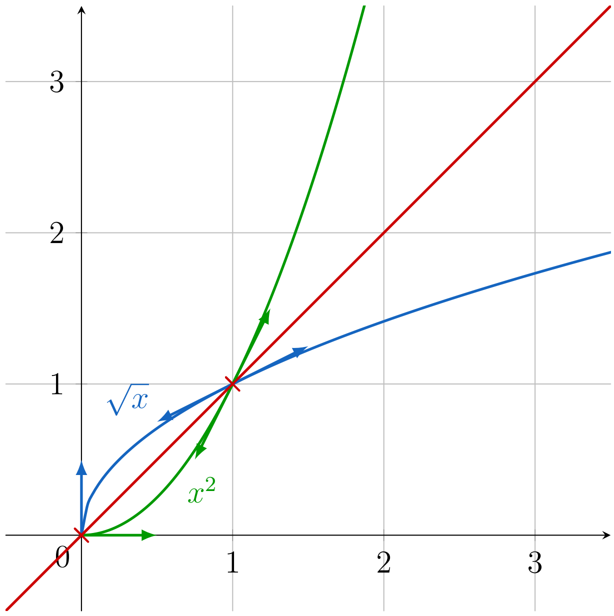
Exemple IV.28. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et que f est continue strictement croissante sur $[a; b]$, alors f réalise une bijection de $[a; b]$ dans $[f(a); f(b)]$: pour tout élément $c \in [f(a); f(b)]$, l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution (dans $[a; b]$), qui est l'unique antécédent de c par f.*

Remarque IV.29. *C'est en fait une amélioration du TVI, dans le sens où les antécédents sont uniques.*

Théorème IV.30 (dérivabilité des fonctions réciproques)**.** *Soit f est continue strictement monotone sur un intervalle I et $x \in \overset{\circ}{I}$. On suppose que f est dérivable en x, et on pose $y = f(x)$. Alors :*

1. *si $f'(x) \neq 0$: f^{-1} est dérivable en y, avec $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$;*
2. *si $f'(x) = 0$: f^{-1} n'est pas dérivable en y, et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale en (y, x).*

Remarque IV.31. *On retrouve graphiquement le résultat avec les tangentes : si D est une droite de pente $a \neq 0$, sa symétrique par rapport à la première bissectrice est une droite de pente $\dfrac{1}{a}$.*



Corollaire IV.32. *Si I, J sont deux intervalles, f bijective de I sur J, dérivable sur I, et que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J avec : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*

Exemple IV.33. *La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée : $x \mapsto 2x$.*
En particulier, f' est positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+$, ne s'annulant qu'en 0, donc f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.
Sa bijection réciproque est la fonction racine : $f^{-1} : y \mapsto \sqrt{y}$, qui vérifie :

— *si $y \neq 0$: alors en notant $x = \sqrt{y}$, on a $f'(x) = 2x \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en y, avec :*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

— *si $y = 0$: comme $f'(0) = 0$, $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.*
ce qu'on avait déjà vu sur le graphe précédent.

Théorème IV.34. *On a les dérivées usuelles suivantes :*

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$c\ (c \in \mathbb{C})$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{Z}_-^*)$ *cas particulier :* $\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$ $\mathbb{R}^*$	nx^{n-1} $-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$ $\mathbb{R}^*$
$x^\alpha\ (\alpha \in]1;+\infty[\setminus\mathbb{N})$	$\mathbb{R}_+$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+$
$x^\alpha\ (\alpha \in]0;1[)$ *cas particulier :* $\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$ $\mathbb{R}_+$	$\alpha x^{\alpha-1}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$ $\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}_-^* \setminus \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x\ (a \in \mathbb{R}_+^*)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\log_b(x)\ (b \in \mathbb{R}_+^*)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x\ln(b)}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\arcsin(x)$	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$

Chapitre 4

Sommes, produits et systèmes

I Les notations $\sum$ et $\prod$

Définition I.1. *Soient $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ un ensemble fini, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes indexée par I. On définit alors :*

1. *la* ***somme*** *de tous les éléments a_i, notée $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$, comme :*
$$\sum_{i\in I} a_i = a_{i_1} + \cdots + a_{i_n};$$
2. *le* ***produit*** *de tous les éléments a_i, notée $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$, comme :*
$$\prod_{i\in I} a_i = a_{i_1} \times \cdots \times a_{i_n}.$$

Si $I = [\![n;m]\!]$, pour $n \leq m$ deux entiers, on notera :
$$\sum_{i\in[\![n;m]\!]} a_i = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1} + a_m = \sum_{i=n}^{m} a_i \text{ et } \prod_{i\in[\![n;m]\!]} a_i = a_n \cdot a_{n+1} \cdot \cdots \cdot a_{m-1} \cdot a_m = \prod_{i=n}^{m} a_i.$$

Remarque I.2. *Par convention, si $I = \emptyset$, on pose :*
$$\sum_{i\in I} a_i = 0 \text{ et } \prod_{i\in I} a_i = 1.$$

Exemples I.3.

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} k^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 224$;
2. $\prod_{k=2}^{5} k^3 = 2^3 \times 3^3 \times 4^3 \times 5^3 = 1\,728\,000$.

Remarques I.4. *Les indices qui apparaissent dans une somme n'existent que dans cette somme, et leur dénomination est arbitraire. Ainsi :*

1. $\displaystyle k \times \sum_{k=3}^{12} a_k$ *n'est pas défini, mais* $\displaystyle\sum_{k=3}^{12} k \times a_k$ *l'est ;*
2. $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} k^3 = \sum_{l=4}^{8} l^3 = 1260.$

Proposition I.5. *Avec les mêmes notations, si $a_i = \alpha$ ne dépend pas de $i \in I$, alors :*

$$\sum_{i\in I} \alpha = \alpha \times \mathrm{Card}(I) \text{ et } \prod_{i\in I} \alpha = \alpha^{\mathrm{Card}(I)}.$$

En particulier, si $n \leq m$ sont deux entiers :

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha = (m-n+1)\alpha \text{ donc } \sum_{k=1}^{n} \alpha = n\alpha \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \alpha = (n+1)\alpha$$

$$\prod_{k=n}^{m} \alpha = \alpha^{(m-n+1)} \text{ donc } \prod_{k=1}^{n} \alpha = \alpha^{n} \text{ et } \prod_{k=0}^{n} \alpha = \alpha^{n+1}.$$

Proposition I.6 (Relation de Chasles)**.** *Si I_1, I_2 sont deux ensembles disjoints, alors :*

$$\sum_{i\in I_1\cup I_2} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i \text{ et } \prod_{i\in I_1\cup I_2} a_i = \prod_{i\in I_1} a_i \times \prod_{i\in I_2} a_i.$$

En particulier, si $n < m$ sont deux entiers :

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k \text{ et } \prod_{k=1}^{m} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \times \prod_{k=n+1}^{m} a_k.$$

Remarque I.7. *Si I_1 et I_2 ne sont pas disjoints, on peut écrire :*

$$\sum_{i\in I_1\cup I_2} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i - \sum_{i\in I_1\cap I_2} a_i \text{ et } \prod_{i\in I_1\cup I_2} a_i = \frac{\prod_{i\in I_1} a_i \times \prod_{i\in I_2} a_i}{\prod_{i\in I_1\cap I_2} a_i}.$$

Exemple I.8. *En partitionnant $[\![0; 2n-1]\!]$, on peut calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$. En effet, pour $k \in [\![0; 2n-1]\!]$:*

- *si k est pair : on écrit $k = 2i$, avec $i \in [\![0; n-1]\!]$, et alors : $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \lfloor i \rfloor = i$;*
- *si k est impair : on écrit $k = 2j+1$, avec $j \in [\![0; n-1]\!]$, et alors : $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \lfloor j + \frac{1}{2} \rfloor = j$.*

Et finalement :

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{j=0}^{n-1} j = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1).$$

Proposition I.9 (Linéarité de la somme)**.** *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, et $(a_i), (b_i)$ deux familles indexées par I fini :*

$$\sum_{i\in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \left(\sum_{i\in I} a_i \right) + \mu \left(\sum_{i\in I} b_i \right).$$

Remarque I.10. *Si $\lambda = \mu = 1$, ou si $\mu = 0$, ceci nous donne les cas particuliers :*

$$\sum_{i\in I} (a_i + b_i) = \left(\sum_{i\in I} a_i \right) + \left(\sum_{i\in I} b_i \right) \text{ et } \sum_{i\in I} (\lambda a_i) = \lambda \left(\sum_{i\in I} a_i \right).$$

Proposition I.11. *Avec les mêmes notations :*

1. $\prod_{i\in I} (a_i^{\lambda} \times b_i^{\mu}) = \left(\prod_{i\in I} a_i^{\lambda}\right) \times \left(\prod_{i\in I} b_i^{\mu}\right) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)^{\lambda} \times \left(\prod_{i\in I} b_i\right)^{\mu}$;

2. $\prod_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^{\mathrm{Card}(I)}\left(\prod_{i\in I} a_i\right)$.

Remarque I.12. *Attention à l'exposant pour le produit !*

Proposition I.13 (Changement d'indice)**.** *Si I, J sont deux ensembles, $f : I \to J$ une bijection et $(a_j)_{j\in J}$ une famille de complexes indexée par J, alors :*

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{i\in I} a_{f(i)}.$$

Inversement, si $(b_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes indexée par I, alors :

$$\sum_{i\in J} b_i = \sum_{j\in J} b_{f^{-1}(j)}.$$

En particulier :

$$\sum_{j=n}^{m} a_j = \sum_{i=0}^{m-n} a_{i+n}.$$

Et les résultats précédents restent vrais en changeant les sommes en produits.

II Sommes classiques

Proposition II.1 (Sommes et produits télescopiques)**.** *Si $n \leq m$ sont des entiers et $(a_i)_{i\in[\![n;m+1]\!]}$ est une famille de complexes alors :*

$$\sum_{k=n}^{m}(a_{k+1} - a_k) = a_{m+1} - a_n.$$

Si de plus les a_i sont non-nuls :

$$\prod_{k=n}^{m} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{m+1}}{a_n}.$$

Exemples II.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

1. *si $k \in [\![1;n]\!]$, alors : $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$, et donc :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1};$$

2. *si $k \in [\![1;n]\!]$, alors : $1 + \dfrac{1}{k} = \dfrac{k+1}{k}$, et donc :*

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right) = n+1.$$

Proposition II.3 (Somme géométrique)**.** *Si q est un complexe et $n \in \mathbb{N}$, alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}.$$

Démonstration. Si $q = 1$, alors : $\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$.
Si $q \neq 1$, alors :

$$\begin{aligned}(1-q) \times \sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n} (q^k - q^{k+1}) \text{ par linéarité} \\ &= 1 - q^{n+1} \text{ par télescopage}\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Corollaire II.4. *Si $q \neq 1$ est un complexe, $n \leq m$ deux entiers, et (a_k) est une suite **géométrique** de raison q (c'est-à-dire que pour tout entier k : $a_{k+1} = q \times a_k$), alors :*

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \frac{a_n - a_{m+1}}{1-q} = a_n \times \frac{1 - q^{m-n+1}}{1-q} = (\textit{Premier terme}) \times \frac{1 - \textit{raison}^{\textit{nombre de termes}}}{1 - \textit{raison}}.$$

Démonstration. Une récurrence immédiate montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_{n+k} = a_n \times q^k$.
Le résultat découle par linéarité du point précédent. □

Exemple II.5. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\sum_{k=5}^{n+12} 2^{3k+1} = 2^{16} \cdot \frac{8^{n+8} - 1}{7}$$

en reconnaissant une somme géométrique de raison $8 \neq 1$ de premier terme $2^1 6 = 65536$ et comportant $n + 12 - 5 + 1 = n + 8$ termes.

Proposition II.6 (Sommes arithmétiques)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Par changement d'indice, on a : $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{l=0}^{n} (n - l)$. Et ainsi :

$$2 \times \sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{k=0}^{n} n = n(n+1)$$

ce qui donne le résultat voulu. □

Corollaire II.7. *Si r est un complexe, $n \leq m$ deux entiers, et (a_k) est une suite **arithmétique** de raison r (c'est-à-dire que pour tout entier k : $a_{k+1} = a_k + r$), alors :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m} a_k &= (m-n+1) \times a_n + \frac{(m-n)(m-n+1)}{2} \times r = \frac{a_n + a_m}{2} \times (m-n+1) \\ &= \frac{\textit{Premier terme} + \textit{Dernier terme}}{2} \times \textit{nombre de termes} \\ &= \textit{Moyenne des termes} \times \textit{nombre de termes}\end{aligned}.$$

Démonstration. Une récurrence immédiate montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_{n+k} = a_n + k \times r$.
Le résultat découle par linéarité du point précédent. □

Exemple II.8. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\sum_{k=5}^{n+12} 3k+1 = \frac{16+3n+37}{2}(n+8) = \frac{(3n+53)(n+8)}{2}$$

en reconnaissant une somme arithmétique (de raison 3 mais c'est inutile) de premier terme 16, de dernier terme $3n+37$ et comportant $n+12-5+1 = n+8$ termes.

Proposition II.9. *Si a, b sont deux complexes, et $n \in \mathbb{N}^*$, alors :*

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b) \times (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a-b) \times \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1} \ . \end{aligned}$$

Démonstration. On développe directement la somme :

$$\begin{aligned} (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k &= \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-k}b^k - a^{n-k-1}b^{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-k}b^k - a^{n-(k+1)}b^{k+1} \\ &= a^n - b^n \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

□

Remarques II.10. *1. pour $n = 2$, on retrouve l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;*

2. on pouvait aussi reconnaître une somme géométrique de raison $\frac{b}{a}$, mais cela demanderai des disjonctions de cas suivant les valeurs de a et b ;

3. inversement, on retrouve la somme géométrique en prenant $a = 1$ et $b = q$.

Corollaire II.11. *Si de plus n est impair, alors :*

$$a^n + b^n = (a+b) \times \left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a+b) \times \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k}b^k.$$

Démonstration. Comme n est impair, alors $(-1)^n = -1$, et donc : $a^n + b^n = a - (-b)^n$. Et on applique le résultat précédent. □

Proposition II.12 (Sommes quadratique et cubique)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

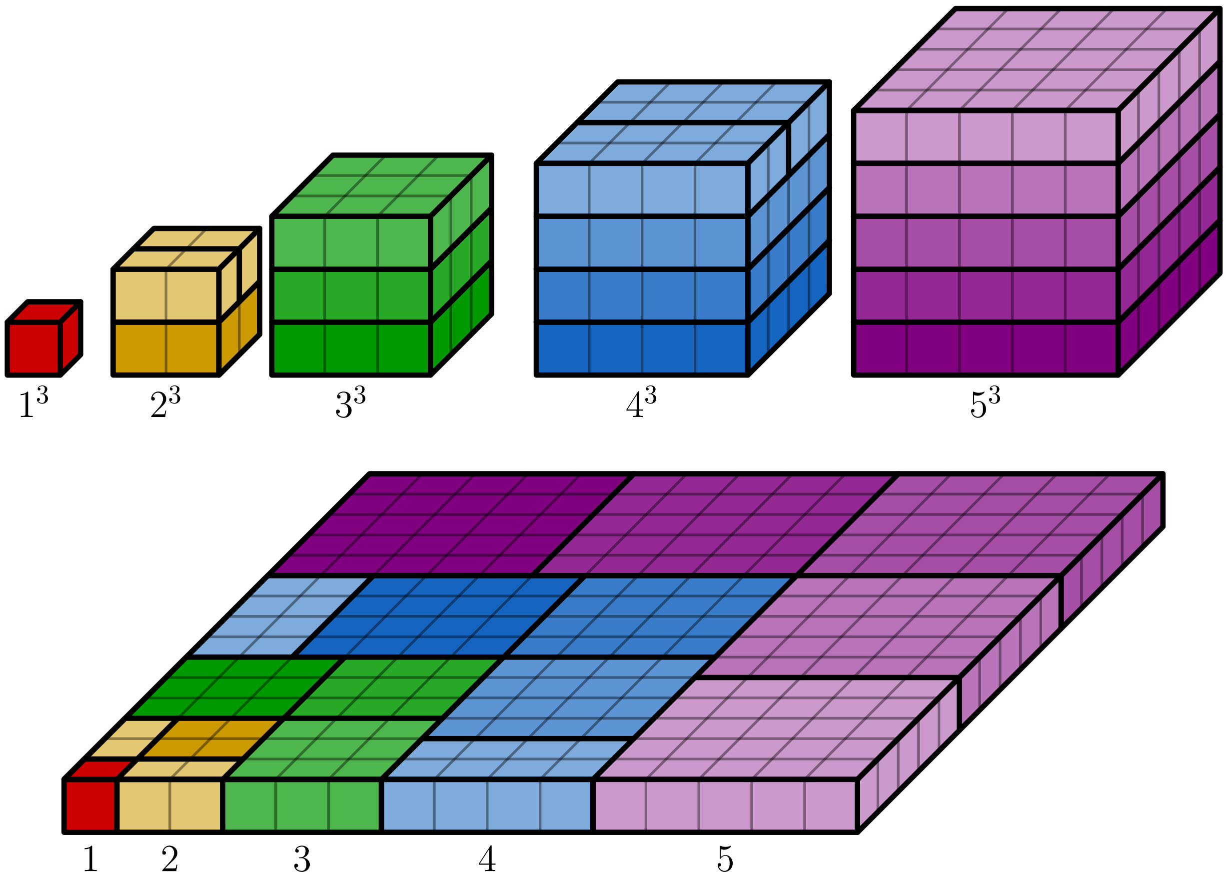
1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Démonstration. Le premier résultat a été montré au chapitre 1.
Le second est laissé en exercice. □

Remarque II.13. *Le second résultat peut aussi se lire comme :*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

ce que l'on peut voir géométriquement. L'idée étant que l'aire d'un carré de côté $1+2+\cdots+n$ doit être égale à $1+2^3+\cdots+n^3$.
Pour cela, on peut voir que, au moment d'augmenter la longueur du carré de n, on rajoute une bande dont l'aire peut être découpée en n carrés de taille $n\times n$. C'est-à-dire qu'on augment l'aire totale de $n\times n^2=n^3$. Ce dernier point est illustrée sur la figure ci-dessous :



III Sommes et produits doubles

La plupart des résultats suivants s'étendent à des produits.

Remarque III.1. *Les sommes doubles apparaissent quand on somme des éléments avec deux indices : on peut alors les écrire soit comme une somme, soit comme des sommes doubles. L'enjeu est de bien choisir l'écriture pour les calculer explicitement.*

III.1 Sommes rectangulaires

Définition III.2. *Une* ***somme rectangulaire*** *est une somme double dans laquelle les deux indices varient* ***de manière décorrélée****, c'est-à-dire de la forme :*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}.$$

Remarque III.3. *Si on prend par exemple $I=[\![1;n]\!]$ et $J=[\![1;p]\!]$, on obtient la somme double :*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} a_{i,j}$$

qui est la somme de tous les éléments du tableau suivant :

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\dots$	$\dots$	$a_{1,p}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\dots$	$\dots$	$a_{2,p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\dots$	$\dots$	$a_{n,p}$

.

Proposition III.4. *Si $(a_{i,j})$ est une famille de complexes indexée par $[\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, alors :*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right).$$

Démonstration. La première somme revient à sommer tous les éléments du tableau.
Le deux autres reviennent à sommer tous les éléments de chaque ligne ou colonne, puis de sommer les sommes obtenues, donc de sommer tous les éléments du tableau. □

Corollaire III.5. *Si (a_i) et (b_j) sont des familles de complexes indexées respectivement par $[\![1;n]\!]$ et $[\![1;p]\!]$, alors :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{p} b_j \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_i b_j.$$

Démonstration. En sommant d'abord sur les lignes, par linéarité de la somme. □

Remarque III.6. *Si (a_k) est indexée par $[\![1;n]\!]$, on trouve :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

qui correspond quand $n = 2$ à l'identité remarquable : $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$.

III.2 Sommes triangulaires

Définition III.7. *Une **somme triangulaire** est une somme double dans laquelle les deux indices varient **de manière corrélée**, c'est-à-dire de la forme :*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq i}} a_{i,j} \text{ ou } \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \leq j \leq n}} a_{i,j}$$

ou avec des inégalités strictes.

Remarque III.8. *Les deux sommes ci-dessus correspondent aux sommes des éléments de l'un des tableaux suivants :*

$a_{1,1}$	0	$\dots$	$\dots$	0
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\dots$	$\dots$	$a_{n,n}$

ou

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\dots$	$\dots$	$a_{1,n}$
0	$a_{2,2}$	$\dots$	$\dots$	$a_{2,n}$
0	$\vdots$	$\ddots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	0	$a_{n,n}$

.

Proposition III.9. *Si $(a_{i,j})$ est indexée par $[\![0,n]\!]^2$, alors :*

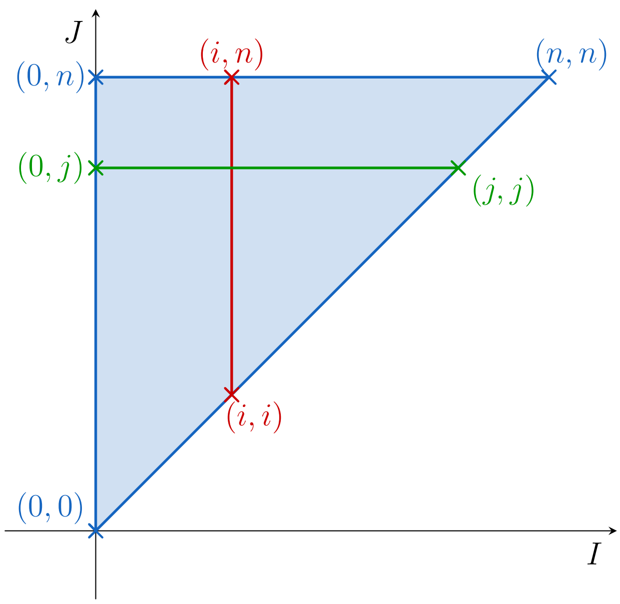
$$\sum_{0\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right)$$

$$\sum_{0\leq i< j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j-1} a_{i,j}\right)$$

Démonstration. Comme pour les sommes rectangulaires : on somme les éléments du tableau, ou les lignes/colonnes que l'on somme ensuite entre elles. □

Remarque III.10. *L'idée la plus importante est que, quand l'on cherche à calculer une somme triangulaire, on fixe un des indices, et on regarde comment varie le second indice une fois la valeur du premier fixe.*

Pour la première somme, l'ensemble des i,j tels que $0\leq i\leq j\leq n$ décrit l'ensemble suivant (en bleu) :



Et on a alors deux possibilités pour calculer la somme :

- *on commence par fixer i (qui variera entre 0 et n) : les valeurs de (i,j), pour i fixé, donnent l'ensemble en rouge, et donc j varie entre i et n ;*
- *on commence par fixer j (qui variera entre 0 et n) : les valeurs de (i,j), pour j fixé, donnent l'ensemble en vert, et donc i varie entre 0 et j.*

Et c'est toujours avec ce type de raisonnement qu'il faudra calculer des sommes triangulaires.

Exemple III.11. *Calculons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ la somme :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$.

On fait apparaître une somme double :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} 2^{k-1} \\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n} 2^{k-1} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{2^{l-1}-2^n}{1-2} \\
&= \sum_{l=1}^{n} (2^n - 2^{l-1}) \\
&= n \times 2^n - \frac{1-2^n}{1-2} \\
&= (n-1) \times 2^n + 1
\end{aligned}$$

IV Factorielle et coefficients binomiaux

Définition IV.1. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la **factorielle** de n par :*

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k$$

et on pose par convention $0! = 1$.

Remarque IV.2. *On peut aussi définir la factorielle récursivement par :*

$$n! = \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ n \times ((n-1)!) & si \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Définition IV.3. *Si $n, k \in \mathbb{N}$ (et éventuellement $k \in \mathbb{Z}$), on définit le **coefficient binomial** "k parmi n" par :*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & si\ k \leq n \\ 0 & si\ k > n \end{cases}.$$

Remarque IV.4. *La quantité $\binom{n}{k}$ correspond aux nombres de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.*

Proposition IV.5. *Si $k, n \in \mathbb{N}$:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Exemple IV.6. *On a les valeurs particulières suivantes :*

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$;
3. $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Proposition IV.7 (Triangle de Pascal)**.** *Si $k, n \in \mathbb{N}$, alors :*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstration. On procède par disjonction de cas.
Si $k > n$: toutes les sommes sont nulles.
Si $k = n$: on trouve : $1 + 0 = 1$.
Si $k \in [\![0; n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\tbinom{n}{k} + \tbinom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
&= \frac{n! \times (k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n! \times (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n! \times (k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \tbinom{n+1}{k+1}
\end{aligned}.$$

□

Remarque IV.8. *Le triangle de Pascal permet de calculer de proche en proche tous les coefficients binomiaux. On représente sur la n-ème ligne les coefficients* $\binom{n}{k}$ *pour* $0 \leq k \leq n$ *:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& & & & & \tbinom{1}{0}=1 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{1}{1}=1 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & & & & \\
& & & & \tbinom{2}{0}=1 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{2}{1}=2 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{2}{2}=1 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & & & \\
& & & \tbinom{3}{0}=1 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{3}{1}=3 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{3}{2}=3 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{3}{3}=1 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & & \\
& & \tbinom{4}{0}=1 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{4}{1}=4 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{4}{2}=6 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{4}{3}=4 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{4}{4}=1 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \\
& \tbinom{5}{0}=1 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{5}{1}=5 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{5}{2}=10 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{5}{3}=10 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{5}{4}=5 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & & \tbinom{5}{5}=1 \arrow[dl,"+"'] \arrow[dr,"+"] & \\
\tbinom{6}{0}=1 & & \tbinom{6}{1}=6 & & \tbinom{6}{2}=15 & & \tbinom{6}{3}=20 & & \tbinom{6}{4}=15 & & \tbinom{6}{5}=6 & & \tbinom{6}{6}=1
\end{tikzcd}$$

Corollaire IV.9. *Pour tous* $n, k \in \mathbb{N}$ *:* $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Démonstration. En utilisant le triangle de Pascal, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$P(n) : \text{“}\forall k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}\text{”}.$$

— initialisation : pour $n = 0$: Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\binom{0}{k} = \begin{cases} 1 \in \mathbb{N} & \text{si } k = 0 \\ 0 \in \mathbb{N} & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

ce qui prouve la propriété $P(0)$ par disjonction de cas.

— hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors :
  — si $k = 0$: $\binom{n+1}{k} = 1 \in \mathbb{N}$;
  — si $k > 0$: par triangle de Pascal : $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ Par hypothèse de récurrence : $\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$. Par somme, on déduit : $\binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}$.

Donc par disjonction de cas : $\binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}$. D'où l'hérédité.
D'où la récurrence. □

Proposition IV.10. *Si $n, k \in \mathbb{N}^*$, alors :*

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration. Le cas $k > n$ est immédiat.
Si $k \leq n$:

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

□

Théorème IV.11 (Formule du binôme de Newton)**.** *Si $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Si $n = 0$: $(a+b)^n = (a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &\overset{\text{définition}}{=} (a+b) \times (a+b)^n \overset{HR}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&\overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&\overset{\text{changement d'indice}}{=} \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{n+1-l} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&\overset{\text{Chasles}}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} \\
&= \tbinom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
&\overset{\text{Chasles}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence. □

Exemples IV.12. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0$;

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}n^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}n^k\cdot 1^{n-k} = (n+1)^n$;

4. *En revanche, on ne peut pas faire apparaître une formule du binôme dans la somme* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^k$, *car le nombre que l'on met à la puissance (à sa voir k ici) change lors de la sommation.*

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}2^{3k+2} = \sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}2^{3l+5} = 2^5\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}8^l = 2^5\cdot 9^{n-1}.$

6. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - n - 1$

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{2n-k} = 3^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{n-k} = 3^n\cdot 5^n = 15^n$

8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{3k}5^{n-k/2} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}8^k\sqrt{5}^{2n-k} = \sqrt{5}^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}8^k\sqrt{5}^{n-k} = \sqrt{5}^n(8+\sqrt{5})^n$

9. *Posons :*

$$A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k} \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}.$$

Alors, par changement d'indice, on trouve :

— *si* $k \in \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, *alors* $l = 2k$ *parcourt tous les entiers pairs de* $[\![0;n]\!]$; *donc :*

$$A_n = \sum_{\substack{l\in[\![0;n]\!]\\ l \text{ pair}}}\binom{n}{l};$$

— *si* $k \in \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$, *alors* $l = 2k+1$ *parcourt tous les entiers impairs de* $[\![0;n]\!]$; *donc :*

$$B_n = \sum_{\substack{l\in[\![0;n]\!]\\ l \text{ impair}}}\binom{n}{l}.$$

Et ainsi, on trouve :

$$A_n + B_n = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} = 2^n \text{ et } A_n - B_n = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^l = 0.$$

Et finalement :

$$A_n = B_n = 2^{n-1}.$$

V Résolution de systèmes linéaires

On fixe $\mathbb{K}$ comme étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

Définition V.1. *Un* ***système linéaire à*** n ***équations et*** p ***inconnues*** *est un système de la forme :*

$$(\mathcal{S}) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

*où $x_1, \dots, x_p$ sont des inconnues (que l'on cherche dans $\mathbb{K}$), et où les $(a_{i,j})$ et les b_i sont des scalaires fixé. Les $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** du système.*
*Le n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ est appelé le **second membre** du système.*
*Le système obtenu en remplaçant le second membre par $(0, \dots, 0)$ est appelé **système homogène associé à $\mathcal{S}$**.*
*On dit que $(\mathcal{S})$ est **incompatible** s'il n'a pas de solutions, et **compatible** sinon.*

Remarque V.2. *Un système homogène est toujours compatible.*

Proposition V.3. *Si $(n, p) = (2, 2)$, résoudre le système*

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & e \\ cx + dy & = & f \end{array} \right.$$

où $(a, b), (c, d) \neq (0, 0)$, revient à chercher l'intersection des droites $\mathcal{D}_1 : ax + by = e$ et $\mathcal{D}_2 : cx + dy = f$:

1. *si les droites sont confondues : il y a une infinité de solutions (tous les points de $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$) ;*
2. *si les droites sont parallèles distinctes : il n'y a pas de solutions ;*
3. *si les droites sont sécantes : il y a une seule solution.*

Proposition-Définition V.4. *Avec les mêmes notations appelle **déterminant du système** $(\mathcal{S})$ la quantité $ad - bc$. Alors $(\mathcal{S})$ admet une unique solution si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.*

Démonstration. Le système admet une unique solution si, et seulement si, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes.
Les vecteurs (a, b) et (c, d) sont des vecteurs normaux à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes si, et seulement si : $\det((a, b), (c, d)) \neq 0$, c'est-à-dire $ad - bc \neq 0$. □

Proposition V.5. *Si $(n, p) = (2, 3)$, résoudre le système :*

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + cz & = & g \\ dx + ey + fz & = & h \end{array} \right.$$

où $(a, b, c), (d, e, f) \neq (0, 0, 0)$, revient à chercher l'intersection des plans $\mathcal{P}_1 : ax + by + cz = g$ et $\mathcal{P}_2 : dx + ey + fz = h$:

1. *si les plans sont confondus : il y a une infinité de solutions (tous les points de $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$) ;*
2. *si les plans sont parallèles distincts : il n'y a pas de solutions ;*
3. *si les plans sont sécants : il y a une infinité de solutions (tous les points de la droite $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$).*

Définition V.6. *Un système est dit **échelonné** si le premier coefficient non nul de chaque ligne, qu'on appelle **pivot**, est situé strictement à gauche des pivots des lignes suivantes.*

Remarque V.7. *Si on note j_i l'indice du pivot de la ligne L_i, cela revient à dire qu'il existe $k \in [\![1; n]\!]$ tel que : les lignes $L_{k+1}, \dots, L_n$ du système homogène sont nulles, et que :$j_1 < j_2 < \dots < j_k$.*

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} a_{1,j_1}x_{j_1} & + & \dots & + & \dots & + & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & = & b_1 \\ 0 & + & 0 & + & a_{2,j_2}x_{j_2} & + & \dots & + & \dots & & \dots & & \dots & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & a_{k,j_k}x_{j_k} & + & \dots & = & b_k \end{array} \right.$$

Exemple V.8. *Le système suivant est échelonné :*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & & - & x_3 & = & 1 \end{array} \right. .$$

Définition V.9. *Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système sont :*

1. *la **permutation** : on échange les lignes L_i et L_j, codée par $L_i \leftrightarrow L_j$;*
2. *la **dilatation** : multiplication d'une ligne par un scalaire λ non nul, codée par $L_i \leftarrow \lambda L_i$;*
3. *la **transvection** : ajout à la ligne L_i d'un multiple de la ligne L_j, codée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.*

Remarques V.10.

1. *Il faut bien considérer **toute** la ligne à chaque fois (y compris b_i).*
2. *L'ordre des opérations a une importance, et on les fait **successivement**.*

Définition V.11. *On dit que deux systèmes linéaires sont **équivalents** si l'on peut passer de l'un à l'autre par un succession finie d'opérations élémentaires.*

Remarque V.12. *On peut "revenir en arrière" après avoir fait un opération élémentaire, et ceci à l'aide d'une autre opération élémentaire. Plus précisément :*

— *une permutation est annulée par elle-même ;*
— *une dilatation de rapport λ est annulée par la dilatation de la même ligne de rapport $\frac{1}{\lambda}$;*
— *une transvection de coefficient λ est annulée par la dilatation des mêmes lignes de coefficient $-\lambda$.*

En conséquence, la relation "être équivalent" sur les systèmes est une relation d'équivalence.

Théorème V.13. *Deux systèmes équivalents ont même ensemble solution.*

Démonstration. Constatons déjà que chaque opération élémentaire ne peut qu'agrandir l'ensemble solution du système initial. Ceci est clair car un système d'égalité est bien préservé quand on les combine par les opérations élémentaires.
Comme on peut revenir en arrière par d'autres opérations élémentaires, le résultat découle par double inclusion. □

Théorème V.14 (Algorithme du pivot de Gauss–Jordan)**.** *Tout système est équivalent à un système échelonné. La succession d'opérations élémentaires est donnée par la méthode de Gauss-Jordan.*

Remarque V.15. *L'intérêt est qu'un système échelonné est très facile à résoudre par méthode de remontée : on résout les équations avec le moins d'inconnues, puis les réinjecte dans les précédentes.*
Les inconnues qui n'apparaissent pas comme pivots sont alors choisies librement et constituent des paramètres pour décrire l'ensemble solution.

Méthode V.16. *La méthode se fait récursivement selon le nombre d'inconnues du système. On considère le système :*

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

— *si tous les $a_{i,1}$ sont nuls : alors la première colonne du système est nulle, et on continue à échelonner suivant les colonnes suivantes ;*
— *sinon : quitte à permuter deux lignes, on a $a_{1,1} \neq 0$. On fait pour tout $i \in [\![2; n]\!]$ la transvection : $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$. La première colonne du système a seulement son premier coefficient non nul. Le système obtenu est de la forme :*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ 0 & + & a'_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & a'_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b'_n \end{array} \right.$$

où, pour tout $i \in [\![2;n]\!]$ et tout $j \in [\![2;p]\!]$ on a :

$$a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} a_{1,j} \text{ et } b'_j = b_j - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} b_1.$$

et il suffit alors d'échelonner le système :

$$(\mathcal{S}') : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a'_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

Remarque V.17. *En pratique, on prendra un pivot qui facilite les expression $\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ (par exemple avec $a_{1,1} = 1$).*

Corollaire V.18. *Un système* ***compatible*** *(par exemple homogène) à n équations et p inconnues possède une infinité de solutions dès lors que $p > n$.*
En particulier, il admet une solution non nulle.

Démonstration. On échelonne le système, ce qui donne un système échelonné, à n équations.
Comme $p > n$, alors l'une des inconnues n'apparaît pas comme pivot, donc peut être choisie librement dans $\mathbb{K}$.
Pour chacune des valeurs choisie, la remontée permet de trouver une solution au système. L'infinité de l'ensemble solution découle alors de l'infinité de $\mathbb{K}$. □

Exemple V.19. *Résoudre le système à 3 équations et 3 inconnues :*

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccl} (\mathcal{S}) & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & -5 \end{array} \right. \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{ccc} L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 4L_1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ & & & + & 4x_3 & = & -2 \end{array} \right. \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{ccc} L_3 & \leftarrow & L_3 - L_2 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccl} x_3 & = & -1/2 \\ x_2 & = & 1 + x_3 = 1/2 \\ x_1 & = & 2 - x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Donc le système admet pour unique solution $(1, 1/2, -1/2)$.

Exemple V.20. *Résoudre le système à 3 équations et 3 inconnues :*

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccl} (\mathcal{S}) & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ & - & 7x_2 & + & 7x_3 & = & -7 \end{array} \right. \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{ccc} L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 4L_1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{ccc} L_3 & \leftarrow & L_3 - \frac{7}{3}L_2 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccl} x_3 & = & x_3 \\ x_2 & = & 1 + x_3 \\ x_1 & = & 2 - x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Donc le système admet pour solutions exactement tous les triplets de la forme $(1, 1+x_3, x_3)$ *pour* $x_3 \in \mathbb{K}$.

Exemple V.21. *Résoudre le système à 3 équations et 3 inconnues :*

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rll} (\mathcal{S}) & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ & - & 7x_2 & + & 7x_3 & = & -5 \end{array} \right. & \textit{avec} \left\{ \begin{array}{lcl} L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 4L_1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ & & & & 0 & = & 2 \end{array} \right. & \textit{avec} \left\{ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{3}L_2 \right. \end{array}$$

Donc le système n'admet aucune solution.

Exemple V.22. *Résolvons le système* $(S) : \{x + 2y + 3z = 4$.
Le système est déjà échelonné. On a donc :

$$(S) \Leftrightarrow x = 4 - 2y - 3z$$

donc l'ensemble solution est : $\{(4 - 2y - 3z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

Remarques V.23.

1. *Dans le premier exemple, on vérifie bien que l'unique solution trouvée est bien une solution. On peut le faire pour quelques solutions dans le deuxième exemple (par exemple pour* $(1, 1, 0)$ *ou* $(1, 0, -1)$*), ce qui permet souvent de détecter une erreur de calcul.*
2. *En pratique, on préfère faire apparaître les paramètres avec des lettres grecques* $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \dots)$*. Et donc on écrirait plutôt l'ensemble solution précédent comme :*
$$\{(1, 1+\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$
3. *On aurait pu échelonner différemment, en faisant disparaître* x_2 *(au lieu de* x_3*). On aurait ainsi choisi* x_2 *librement (et non* x_3*), ce qui aurait donné le même ensemble solution, mais sous la forme :*
$$\{(1, \lambda, -1+\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$
4. *Dans le deuxième exemple, le point clef est que l'on ne donne des rôles aux différentes inconnues : en faisant la remontée, on choisit sur chaque ligne une inconnue exprimée qui n'a pas encore de rôle, qui sera un pivot, et les autres sont choisit par défaut comme paramètres.*

Chapitre 5

Les fonctions usuelles

I Logarithmes, exponentielles et puissances

I.1 La fonction logarithme

Définition I.1. *On appelle **fonction logarithme népeirien** l'unique primitive de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *qui s'annule en* 1*. On la note* ln *ou* Log.

Théorème I.2. *Si* $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*, alors :*

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
2. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
4. $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.

Démonstration.

1. Si $a, b > 0$, on considère la fonction $f_b : x \mapsto \ln(xb) - \ln(x)$
   Alors f_b est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{b}{xb} - \dfrac{1}{x} = 0$.
   Donc f_b est constante, donc : $f(a) = f(1)$, donc : $\ln(ab) - \ln(a) = \ln(b)$.
2. On déduit : $0 = \ln(1) = \ln\left(a\dfrac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$.
3. De même : $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
4. Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$. Puis : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(a^{-n}) = \ln\left(\dfrac{1}{a^n}\right) = -n\ln(a)$.

□

Proposition I.3. *La fonction* ln *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$*, telle que :*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Démonstration. — $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ donc ln est strictement croissante ;

— montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, c'est-à-dire que :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x > B \Rightarrow \ln(x) > A.$$

Soit $A \in \mathbb{R}$.
Par stricte croissante, on a : $\ln(2) > \ln(1) = 0$.
Posons $N = \left\lfloor \frac{A}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$ (qui est un entier). Alors :

$$\ln(2^N) = N \cdot \ln(2) \geq \frac{A}{\ln(2)} \cdot \ln(2) = A.$$

Par croissance de ln, $B = 2^N$ convient.

— $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = -\infty$.

□

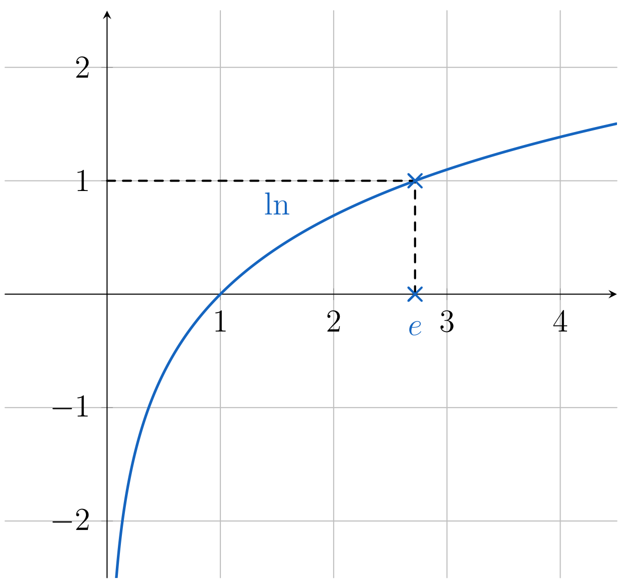
Corollaire I.4. *La fonction* ln *réalise une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Découle de la continuité de ln : avec le résultat précédent, on peut bien utiliser le théorème de la bijection monotone. □

Proposition I.5. *L'équation* $\ln(x) = 1$ *possède une unique solution : on la note* e, *et on a* $e \simeq 2,71828$.

Proposition I.6. *On a le tableau de variations et la représentation graphique suivants :*

x	0	$+\infty$
$\ln'$	‖	$+$
$\ln$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$



Définition I.7. *Si* $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, *on lui associe la fonction* ***logarithme de base*** a, *notée* $\log_a$, *comme la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Remarques I.8.

1. *On utilise beaucoup le logarithme en base* 2*, aussi appelé* ***logarithme binaire****, et le logarithme en base* 10*, aussi appelé* ***logarithme décimal****, et noté parfois* log.
2. *Le logarithme népeirien est le logarithme de base* e*.*

Proposition I.9. *La fonction* $\log_a$ *réalise une bijection strictement monotone de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $\log_a(1) = 0$ *et* $\log_a(a) = 1$*.*
Elle est strictement croissante si $a > 1$ *et strictement décroissante si* $0 < a < 1$*, et vérifie les formules du théorème I.2.*

I.2 La fonction exponentielle

Théorème-Définition I.10. *On définit la fonction* ***exponentielle (népeirienne)****, notée* exp*, comme la réciproque de la fonction* ln*.*
Elle est définie sur $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y).$$

La fonction exp *est continue, strictement croissante et dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée elle-même.*

Démonstration. L'existence, la continuité et la monotonie découlent des propriétés de ln.
Comme $\ln' = x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, alors exp est dérivable sur $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.
Si $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\dfrac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

□

Remarque I.11. *On notera plutôt* e^x *au lieu de* $\exp(x)$*.*
La raison étant que, si $n \in \mathbb{Z}$*, on a :* $\ln(e^n) = n\ln(e) = n$*, donc* $\exp(n) = e^n$*.*

Théorème I.12. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*, alors :*

1. $e^{a+b} = e^a e^b$;
2. $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$;
3. $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$;
4. $e^{na} = (e^a)^n$.

Démonstration. Découle des propriétés analogues du ln. Montrons par exemple la première.
Par définition de exp, on a :

$$e^{a+b} = e^a e^b \Leftrightarrow a + b = \ln(e^a e^b)$$

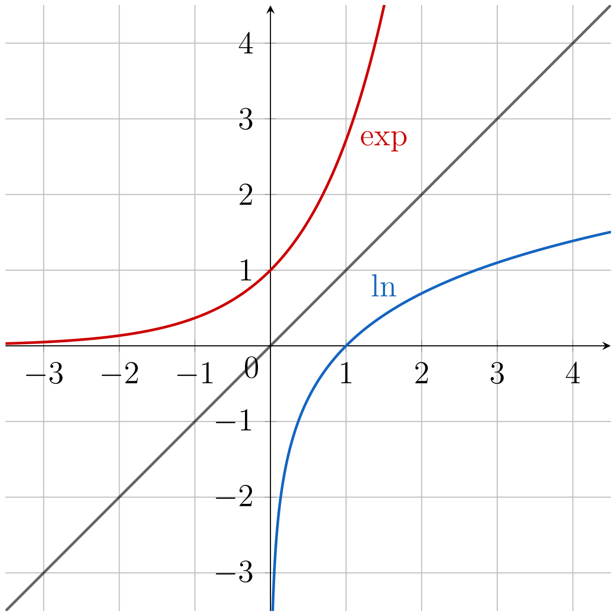
Mais pas propriété de ln, on a :

$$\ln(e^a e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b) = a + b$$

et ainsi on a bien $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$. □

Proposition I.13. *On a le tableau de variations et la représentation graphique suivants :*

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\exp'$	$+$
$\exp$	$0 \nearrow +\infty$



I.3 Les fonctions puissances et exponentielles

Définition I.14. *Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit le nombre a* ***puissance*** *α comme : $a^\alpha = \exp(\alpha \ln(a))$.*

Remarque I.15. *La notation x^n, pour $x < 0$, n'a de sens que si $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposition I.16. *Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :*

1. $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$ *et* $a^{\alpha-\beta} = \dfrac{a^\alpha}{a^\beta}$;
2. $(a^\alpha)^\beta = \left(a^{\alpha\beta}\right) = \left(a^\beta\right)^\alpha$;
3. $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ *et* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$.

Définition I.17. *Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle fonction* ***exponentielle de base*** *a la fonction $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$.*

Proposition I.18. *La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp_a)'(x) = \ln(a) \cdot a^x$:*

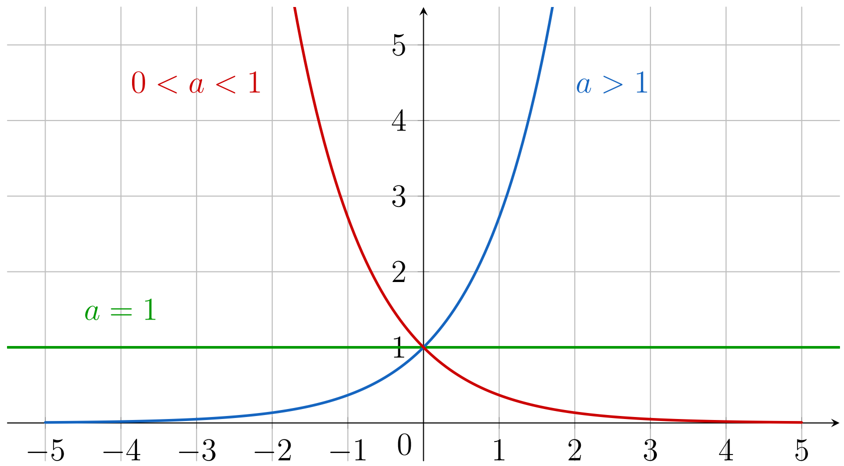
1. *si $a = 1$: elle est constante de valeur 1 ;*
2. *si $a > 1$: elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$;*
3. *si $a < 1$: elle réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. La dérivabilité et la dérivée sont données par composition. Les limites aux bornes également. On conclut par théorème de la bijection monotone pour les cas où $a \neq 1$. $\square$

Proposition I.19. *On a les tableaux de variations et les courbes représentatives "génériques" suivants :*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp_a$ $a > 1$	0 ↗	1	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp_a$ $a < 1$	$+\infty$ ↘	1	↘ 0



Définition I.20. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle fonction* ***puissance*** *α la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.*

Proposition I.21. *La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'_\alpha(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$:*

1. *si $\alpha = 0$: elle est constante de valeur 1, et prolongeable par continuité en 0 ;*
2. *si $\alpha < 0$: elle réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui même, avec pour asymptotes les axes du repère ;*
3. *si $\alpha > 0$: elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.*

Démonstration. Par dérivabilité des fonctions composées, f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'_\alpha(x) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \alpha x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Ainsi, f'_α est du signe de α, ce qui donne la monotonie cherchée.
Le théorème de la bijection monotone donne la bijectivité lorsque $\alpha \neq 0$ (f_α étant dérivable, elle est bien continue). Reste à calculer les limites aux bornes pour avoir l'ensemble image :

- si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = \lim\limits_{x\to 0} e^{\alpha \ln(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\alpha \ln(x)} = +\infty$;
- si $\alpha < 0$: $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = \lim\limits_{x\to 0} e^{\alpha \ln(x)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\alpha \ln(x)} = 0$.

Ce qui donne bien la bijectivité annoncée.
Et le dernier point donne les asymptotes. □

Proposition I.22. *Si $\alpha \neq 0$, alors : $f_\alpha^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}}$.*

Démonstration. Soit $\alpha \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f_\alpha\left(f_{\frac{1}{\alpha}}(x)\right) = \left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = x^{\frac{\alpha}{\alpha}} = x$. □

Proposition I.23. *Si $\alpha > 0$, la fonction f_α est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$. Son prolongement est :*

1. *non dérivable en 0, avec une tangente verticale, si $0 < \alpha < 1$;*
2. *dérivable en 0, de dérivée 1, si $\alpha = 1$;*

3. dérivable en 0*, de dérivée nulle, si* $\alpha > 1$*.*

Démonstration. Le prolongement continu découle des limites calculées précédemment. Pour $x > 0$, le taux d'accroissement de f_α entre 0 et x est donné par :

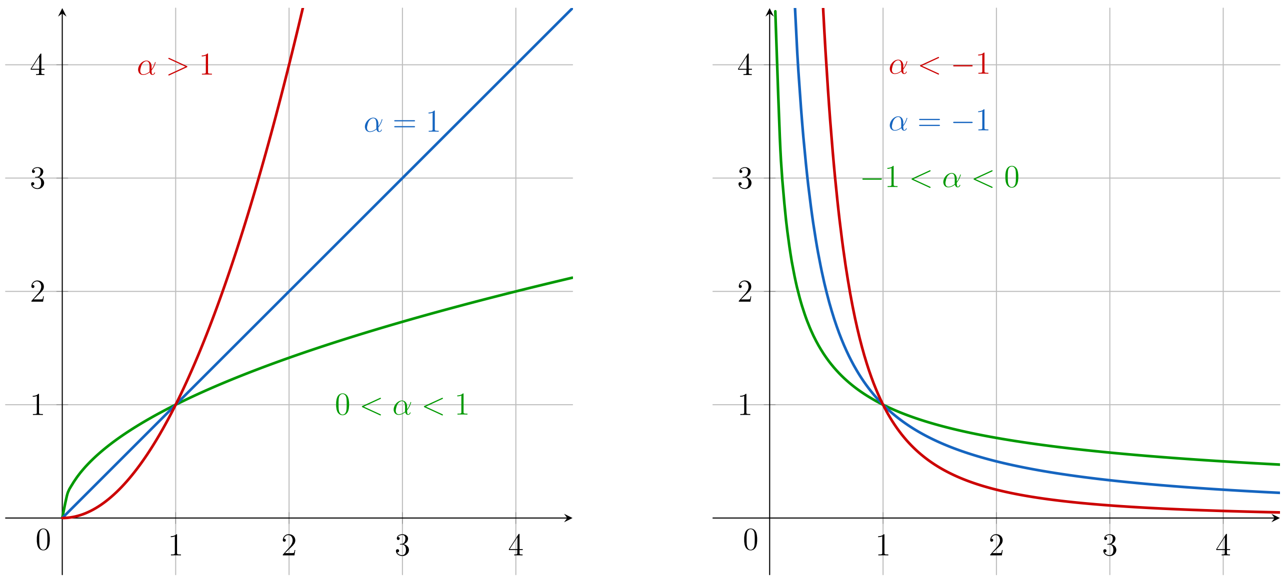
$$\tau_0(x) = \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x - 0} = x^{\alpha-1} = f_{\alpha-1}(x)$$

et on peut alors utiliser les limites calculées précédemment.
On trouve bien le résultat voulu, où la disjonction suivant le signe de $\alpha - 1$ nous donne bien les trois cas de la proposition. □

Proposition I.24. *On a les tableaux de variations et les courbes représentatives "génériques" suivants :*

x	0		1		$+\infty$
f_α, $\alpha > 0$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		1		$+\infty$
f_α, $\alpha < 0$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0



I.4 Comparaisons et limites

Théorème I.25 (Croissances comparées)**.** *Si* $\alpha > 0$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to0} x\ln(x) = \lim_{x\to0} x^\alpha \left|\ln(x)\right|^\beta = 0$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

Démonstration.

1. Considérons $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} [1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(t) - 2\sqrt{t} \end{array} \right.$.

   Alors φ est dérivable sur $[1;+\infty[$, de dérivée en t : $\varphi'(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}} = \dfrac{1-\sqrt{t}}{t} \leq 0$.

Donc φ est décroissante sur $[1;+\infty[$: comme $\varphi(1) = -2 < 0$, alors φ est strictement négative sur $[1;+\infty[$.

Si $x \geq 1$, on a donc : $0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$, donc : $0 \leq \dfrac{\ln(x)}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Par encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

En posant $y = x^\alpha$, donc $x = y^{\frac{1}{\alpha}}$, on trouve :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y^{\frac{1}{\alpha}})}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{\ln(y)}{y} = 0$$

ce qui donne le cas $\beta = 1$.

Le cas $\beta \leq 0$ est immédiat (on n'a pas une forme indéterminée). Considérons donc $\beta > 0$. Alors :

$$\frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta$$

ce qui donne par le résultat précédent et l'étude en 0 de la fonction $x \mapsto x^\beta$ (comme $\beta > 0$) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = \lim_{y\to 0} y^\beta = 0.$$

2. On pose $y = \dfrac{1}{x}$, donc $x = \dfrac{1}{y}$. Alors :

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \left|\ln(x)\right|^\beta = \lim_{y\to+\infty} \frac{\left|\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right|^\beta}{y^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(\ln(y))^\beta}{y^\alpha} = 0.$$

3. $\ln\left(\dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta}\right) = \alpha x - \beta \ln(x) = \alpha x \times \left(1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$

   donc en composant avec la fonction exponentielle : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$.

4. $\ln\left(|x|^\beta e^{\alpha x}\right) = \alpha x + \beta \ln(|x|) = \alpha x \times \left(1 + \dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{\ln|x|}{x}\right) \underset{x\to-\infty}{\to} -\infty$

   donc en composant avec la fonction exponentielle : $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

□

Remarques I.26.

1. *L'exponentielle croît infiniment plus vite que les puissances, qui croissent infiniment plus vite que le logarithme. Cela se manifeste dans les limites précédentes en notant que, dans le cas de formes indéterminées, c'est la partie "dominante" qui donne la limite.*
2. *Les cas où $\beta > 0$ sont en fait les seuls cas intéressants : si $\beta \leq 0$, on n'a pas de forme indéterminée, et un calcul direct donne la limite (par quotient ou produit).*

Exemples I.27. *Pour déterminer une limite, on commence par regarder si les limites classiques et les opérations sur les limites suffisent. Sinon, c'est qu'on obtient une forme indéterminée : il faut alors transformer l'expression habilement pour faire disparaître ces formes indéterminées.*

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3+1)}{x^4-5}$:

$$\frac{\ln(x^3+1)}{x^4-5} = \frac{\ln(x^3+1)}{x^3+1} \times \frac{x^3+1}{x^4-5} = \underbrace{\frac{\ln(x^3+1)}{x^3+1}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{5}{x^4}}}_{\to 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^4+1)}{x^2+3}$:

$$\frac{\ln(x^4+1)}{x^2+3} = \frac{\ln(x^4+1)}{x^4+1} \times \frac{x^4+1}{x^2+3} = \underbrace{\frac{\ln(x^4+1)}{(x^4+1)^{1/2}}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{(1+\frac{1}{x^4})^{1/2}}{1+\frac{3}{x^2}}}_{\to 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x+2}$:

$$\frac{e^{3x}}{x+2} = \underbrace{\frac{e^{3x}}{3x}}_{\to+\infty} \times \underbrace{\frac{3x}{x+2}}_{\to 3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^3+1}$:

$$\frac{e^{3x}}{x^3+1} = \underbrace{\frac{e^{3x}}{(3x)^3}}_{\to+\infty} \times \underbrace{\frac{(3x)^3}{x^3+1}}_{\to 27} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^7+12}$:

$$\frac{e^{x^2}}{x^7+12} = \underbrace{\frac{e^{x^2}}{(x^2)^4}}_{\to+\infty} \times \underbrace{\frac{(x^2)^4}{x^7+12}}_{\to+\infty} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x\ln x+\ln x}{e^x+x\sin x}$:

$$\frac{x^3-3x\ln x+\ln x}{e^x+x\sin x} = \underbrace{\frac{x^3}{e^x}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{1-\frac{3\ln x}{x^2}+\frac{\ln x}{x^3}}{1+\frac{x}{e^x}\sin x}}_{\to 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition I.28 (Limites classiques)**.**

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

Démonstration. Dans les deux cas, on reconnaît des limites de taux d'accroissement :

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{(1+x)-1} = \ln'(1) = 1$;
2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0} = \exp'(0) = 1.$

□

Proposition I.29 (Inégalités classiques)**.** *Les fonctions* ln *et* exp *vérifient que :*

1. *si* $x > -1$*, alors* $\ln(1+x) \leq x$ *;*
2. *si* $x \in \mathbb{R}$*, alors* $e^x \geq 1+x$*.*

De plus, les inégalités précédentes sont des égalités si, et seulement si, $x = 0$.

Démonstration.

1. posons φ définie sur $]-1;+\infty[$ par :$\varphi(x) = \ln(1+x) - x$.
   Alors φ est dérivable avec : $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x}$.
   D'où les variations :

x	-1		0		$+\infty$
φ'		$+$	0	$-$	
φ		$\nearrow$	0	$\searrow$	

   Donc φ est négative sur $]1;+\infty[$, ce qui donne l'inégalité voulue.
2. posons ψ définie sur $\mathbb{R}$ par :$\psi(x) = e^x - x - 1$.
   Alors ψ est dérivable avec : $\psi'(x) = e^x - 1$.
   D'où les variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ψ'		$-$	0	$+$	
ψ		$\searrow$	0	$\nearrow$	

   Donc ψ est positive sur $\mathbb{R}$, ce qui donne l'inégalité voulue.

□

Remarques I.30.

1. *Par croissance de la fonction* $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*, on peut déduire la première inégalité de la seconde en composant par la fonction* $\ln$.
2. *En combinant les deux derniers résultats, on peut raffiner les limites précédentes :*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1^- = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \quad et \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1^+ = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x}.$$

I.5 Puissances de fonctions par des fonctions

Proposition I.31. *Si u, v sont des fonctions définies sur un intervalle I et dérivables sur I, avec u à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors la fonction $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$ est bien définie sur I. De plus, elle est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto \ln(u(x))v'(x)u(x)^{v(x)} + v(x)u'(x)u(x)^{v(x)-1}$.*

Démonstration. Comme u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, alors f est bien définie.
Pour analyser en détail f, on préfère écrire : $f : x \mapsto \exp(v(x) \cdot \ln(u(x)))$.
Par composition et produits, la fonction f est dérivable sur I, et sa dérivée en $x \in I$ est donnée par :

$$f'(x) = (v \cdot \ln(u))'(x) \cdot \exp(v(x)\ln(u(x))) = (v \cdot \ln(u))'(x) \cdot u(x)^{v(x)}$$

qui donne bien la formule précédente en constatant que :

$$(v \cdot \ln(u))'(x) = \ln(u(x))v'(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}.$$

□

Remarque I.32. *Cette formule n'est pas à connaître : elle est là pour illustrer comment étudier ce type de fonctions, ce qui se fait systématiquement par passage par l'écriture exponentielle d'une puissance.*

Exemple I.33. *Étudions la fonction $f : x \mapsto x^x$.*
À cause de la puissance quelconque qui apparaît, f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, elle est dérivable. On calcule sa dérivée en écrivant que $x^x = \exp(x\ln(x))$, ce qui donne pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)x^x.$$

Par stricte croissance de $\ln$, on déduit le signe de f' sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc les variations de f.
Étudions les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$:

- *en 0 : par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$; et donc par composition de limites :*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \exp(x\ln(x)) = \lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$; ceci nous dit que f est prolongeable par continuité en 0 ; on notera g son prolongement, qui est donc défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x^x & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}.$$

- *en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ (par calcul direct), et donc par composition :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp(x\ln(x)) = \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On déduit donc le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 1	$\searrow$	$\frac{1}{e}^{\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Étudions plus en détail f en 0 et en $+\infty$:

- *en 0 : on a déjà le prolongement par continuité ; étudions la dérivabilité du prolongement. Pour $x > 0$, le taux d'accroissement de g entre 0 et x est donné par :*

$$\tau_0(x) = \frac{x^x - 1}{x} = \frac{\exp(x\ln(x)) - 1}{x} = \frac{\exp(x\ln(x)) - 1}{x\ln(x)} \cdot \ln(x)$$

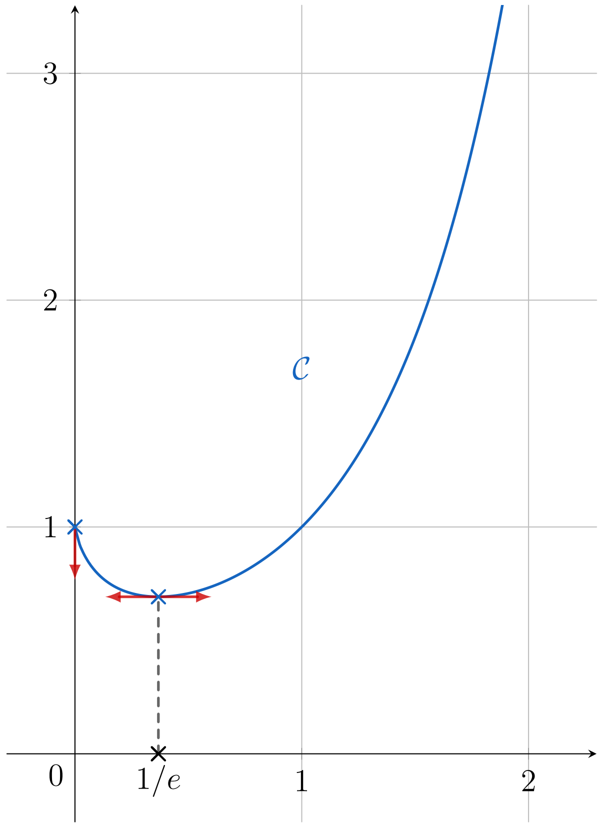
et par limite classique et produit de limites, on a ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} \tau_0(x) = -\infty$. Donc g n'est pas dérivable en 0, mais sa courbe y admet une tangente verticale.

— *en* $+\infty$ *: pour* $x > 0$*, on a :*

$$\frac{f(x)}{x} = x^{x-1} = \exp((x-1)\ln(x))$$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ *(par calcul direct). Donc la courbe de* f *admet en* $+\infty$ *une branche parabolique d'axe vertical.*

On a donc le tracé suivant :



II Les fonctions circulaires

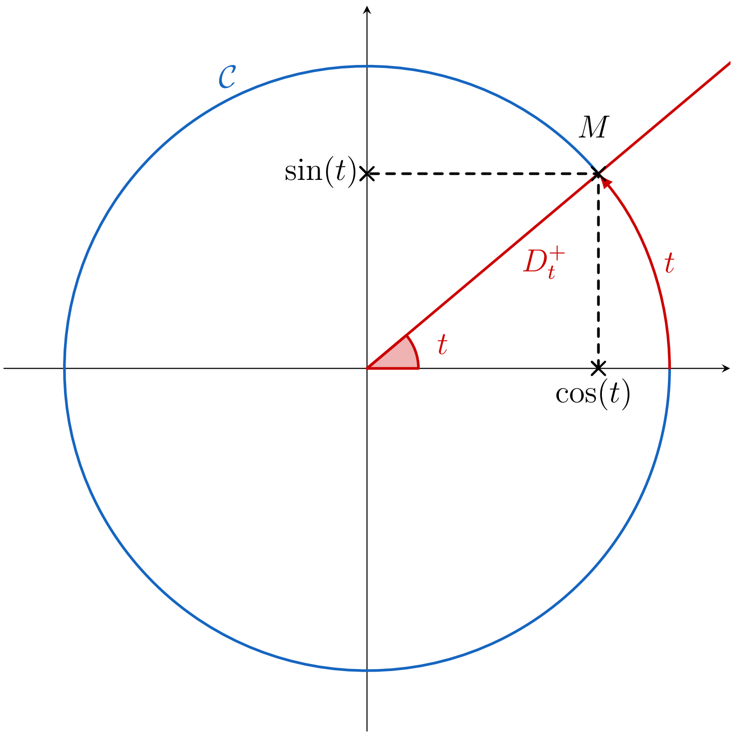
II.1 Le cercle trigonométrique

On se place dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition II.1. *Le* ***cercle trigonométrique*** *est le cercle* $\mathcal{C}$ *de centre* O *et de rayon* 1 *:* $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Définition II.2. *Pour* $t \in \mathbb{R}$*, on considère la demi-droite* D_t^+ *issue de* O *faisant un angle* t *avec l'axe des abscisses. Elle coupe* $\mathcal{C}$ *en un unique point* M*.*

On appelle ***cosinus*** *de* t*, noté* $\cos(t)$*, l'abscisse de* M*. On appelle* ***sinus*** *de* t*, noté* $\sin(t)$*, l'ordonnée de* M*.*



Définition II.3. *Si $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in, \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, on définit sa* ***tangente****, notée* $\tan(t)$, *comme :* $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

Proposition II.4 (Paramétrisation du cercle trigonométrique)**.** *Si $M(x, y)$ est un point du cercle, il existe un réel t tel que $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$. Ce réel est unique à 2π près.*

Démonstration. La demi-droite $[OM)$ fournit l'existence, en prenant pour t l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses.
L'unicité provient de la définition même de π : deux valeurs de t doivent différer d'un nombre de tours entier du cercle, donc d'un multiple entier de 2π. □

Remarque II.5. *En pratique, on utilisera la paramétrisation pour dire qu'il existe un unique t dans $]\pi; \pi]$ ou dans $[0; 2\pi[$.*

Corollaire II.6. *Si $r > 0$, et que $M(x, y)$ est un point du cercle de centre O de rayon r, il existe un unique réel t (à 2π près) tel que : $(x, y) = (r\cos(t), r\sin(t))$.*

Démonstration. Pour un tel (x, y), on a : $x^2 + y^2 = r^2$.
Donc, en posant $(x', y') = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$, on a : $x'^2 + y'^2 = 1$.
Donc $(x', y') = (\cos(t), \sin(t))$, puis $(x, y) = (r\cos(t), r\sin(t))$. □

Proposition II.7. *Si $t \in \mathbb{R}$, alors :*

1. $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$;
2. $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$ *et* $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$;
3. $\cos(-t) = \cos(t)$ *et* $\sin(-t) = -\sin(t)$;
4. $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ *et* $\sin(\pi - t) = \sin(t)$;
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$;
6. *si* $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$: $\tan(t + \pi) = \tan(t)$.

Démonstration. 1. théorème de Pythagore ;

2. définition de π ;
3. la symétrie d'axe horizontal transforme D_t^+ en D_{-t}^+ ; donc envoie $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$ sur $(x, -y) = \cos(-t), \sin(-t))$;
4. pareil avec la symétrie d'axe vertical ;
5. pareil avec la symétrie d'axe oblique ;
6. découle de *3.* et *4.*.

$\square$

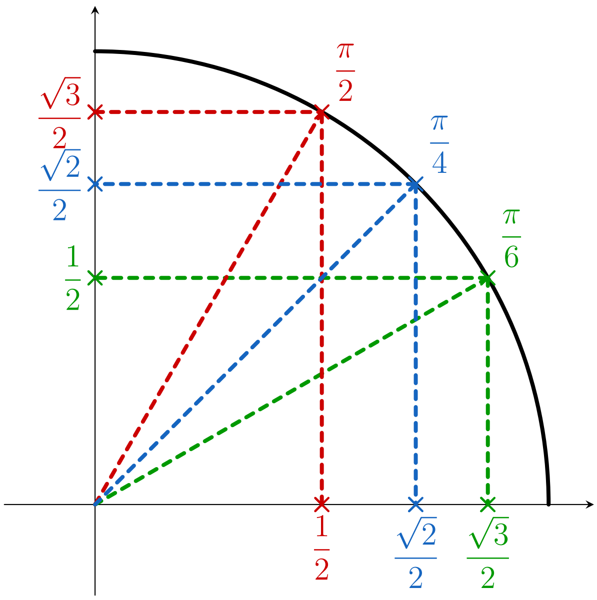
Proposition II.8. *Les fonctions* cos *et* sin *sont 2π-périodiques.*
De plus, cos *est paire,* sin *est impaire et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x) \text{ et } \sin(x + \pi) = -\sin(x).$$

Proposition II.9. *La fonction* tan *est π-périodique et impaire.*

Proposition II.10 (Valeurs remarquables)**.** *On a le tableau de valeurs :*

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*pas défini*



Démonstration. Les valeurs pour 0 ou $\frac{\pi}{2}$ sont immédiates. Pour les autres valeurs, on utilise le théorème de Pythagore dans des triangles particuliers (isocèle-rectangle ou équilatéral). $\square$

Proposition II.11. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors :*

1. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;
4. $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$;
5. *si* $a, b, a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$: $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$;
6. *si* $a, b, a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$: $\tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

Démonstration. On se contente de montrer la deuxième (les autres en découlent).
On pose $M, N \in \mathcal{C}$ avec $M(x, y) = (\cos(a), \sin(a))$ et $N(x', y') = (\cos(b), \sin(b))$.
Alors : $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) = (a - b)$.
Donc : $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM} = OM \cdot ON \cdot \cos(a - b) = \cos(a - b)$.
Mais on a aussi : $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM} = xx' + yy' = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
Ce qui donne bien l'égalité cherchée. □

Corollaire II.12. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$:*

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$;
3. *si* $a, 2a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$: $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$.

Et ainsi :

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \text{ et } \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

Corollaire II.13. *Si $a \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, on pose $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$. Alors :*

1. $\sin(a) = \frac{2t}{1+t^2}$;
2. $\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$;
3. $\tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$ *(si $a \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$)*

Démonstration. Montrons par exemple la première. À l'aide du résultat précédent, on trouve :

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\tan(a/2)}{1 + \tan^2(a/2)} = 2\frac{\sin(a/2)}{\cos(a/2)}\cos^2(a/2) = 2\sin(a/2)\cos(a/2) = \sin(a)$$

ce qui donne bien le résultat cherché.
Les autres égalités se montrent de même. □

Corollaire II.14 (Formules de développement)**.** *Si $a, b \in \mathbb{R}$:*

1. $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a + b) + \cos(a - b)\right)$;
2. $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a - b) - \cos(a + b)\right)$;
3. $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a + b) + \sin(a - b)\right)$.

Corollaire II.15 (Formules de factorisation)**.** *Si $a, b \in \mathbb{R}$:*

1. $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$;
2. $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$;
3. $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$;
4. $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.

Corollaire II.16 (Factorisation générale)**.** *Si $a, b \in \mathbb{R}$, il existe un réel φ tel que :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ a\cos(t) + b\sin(t) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(t - \phi).$$

Démonstration. Si $a = b = 0$, alors tout réel φ convient.
Sinon, comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, alors il existe φ tel que : $\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Et un tel φ convient d'après les formules d'addition. □

Exemple II.17. *Considérons pour $t \in \mathbb{R}$ l'expression :*

$$\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t).$$

On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et ainsi on $\varphi = \frac{\pi}{3}$ convient. Ce qui donne finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(t) + \sqrt{3}\sin(t) = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right).$$

Remarques II.18.

1. *En pratique, on commence par regarder* $\cos(\varphi)$ *(ce qui donneφ au signe près), et* $\sin(\varphi)$ *permet de lever l'ambiguïté sur le signe.*

2. *Ce résultat permet de mieux comprendre les valeurs prises par une combinaison linéaire de* sin *et* cos. *Par exemple, dans l'exemple précédent, on voit que l'expression prend toutes les valeurs entre* -2 *et* 2.

II.2 Propriétés des fonctions circulaires

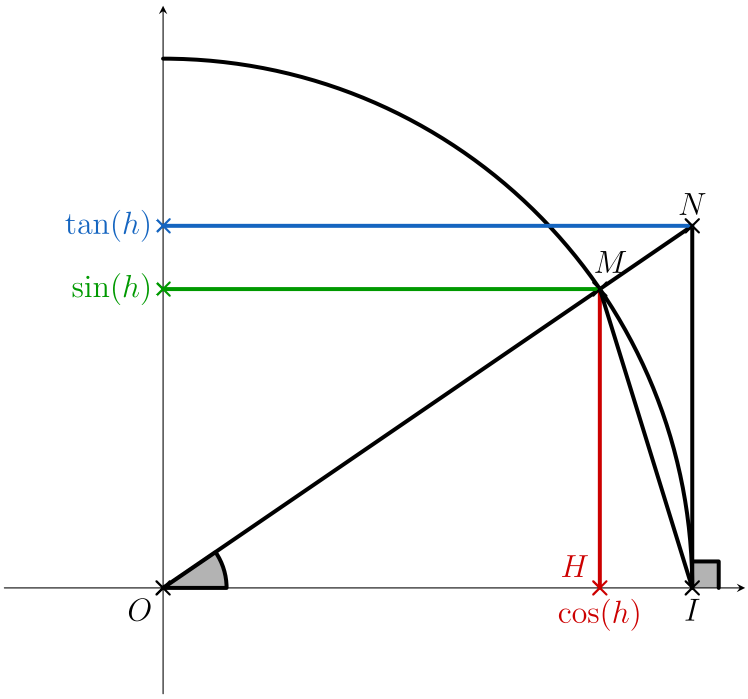
Lemme II.19. *On a les limites :*

1. $\lim_{t \to 0} \sin(t) = 0$ *;*

2. $\lim_{t \to 0} \cos(t) = 1$ *;*

3. $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$

Démonstration. Soit $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$:



On a les aires suivantes :
— le triangle OMI est d'aire $\frac{\sin(h)}{2}$;
— le secteur angulaire entre $[OI]$ et $[OM]$ est d'aire $\frac{h}{2}$;
— le triangle ONI est d'aire $\frac{\tan(h)}{2}$.

Et donc :

$$0 < \sin(h) \leq h \leq \tan(h).$$

1. par encadrement : on trouve $\lim_{h \to 0^+} \sin(h) = 0$;

   Par parité, on a : $\lim_{h \to 0^-} \sin(h) = 0$.

   Donc : $\lim_{t \to 0} \sin(t) = 0$
2. D'où : $\lim_{t \to 0} \cos(t) = \lim_{t \to 0} \left(1 - 2\sin^2(\frac{t}{2})\right) = 1$;
3. En divisant par $\sin(h)$:

$$1 \leq \frac{h}{\sin(h)} \leq \frac{1}{\cos(h)}$$

   d'où par encadrement : $\lim_{h \to 0^+} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.

   Et par parité : $\lim_{h \to 0^-} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.

   Donc : $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

□

Proposition II.20. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :* $|\sin(x)| \leq |x|$.

Démonstration. On procède par disjonction de cas :
— si $x = 0$: ok ;
— si $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$: c'est fait dans la démonstration précédente ;
— si $x \in] - \frac{\pi}{2}; 0[$: c'est vrai par parité ;
— si $x \notin] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: alors $|x| \geq \frac{\pi}{2} > 1 \geq |\sin(x)|$.

□

Théorème II.21. *Les fonction* sin *et* cos *sont continues et dérivables sur* $\mathbb{R}$*, avec* $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$.

Démonstration. On utilise le lemme et les formules d'addition.
Continuité : Si $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sin(x) - \sin(y)| = \left|2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq |x-y|$$

donc $\lim_{y\to x}(\sin(x) - \sin(y)) = 0$: sin est continue en x, donc sur $\mathbb{R}$.
Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, alors cos est la composée des fonctions continues sin et $x \mapsto x + \frac{\pi}{2}$, donc cos est continue sur $\mathbb{R}$.
Dérivabilité : Si $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$:

$$\frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{x-y}{2}}$$

et :
- par continuité de cos : $\lim_{y\to x}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = \cos(x)$;
- par le lemme : $\lim_{y\to x}\frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{x-y}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$.

Donc : $\lim_{y\to x}\dfrac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} = \cos(x)$.
Donc sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec : $\sin' = \cos$.
Par dérivée d'une composée, cos est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos'(x) = 1 \times \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

donc $\cos' = -\sin$. □

Corollaire II.22. *Les fonctions* cos *et* sin *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \cos^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ et } \sin^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

□

Corollaire II.23. *La fonction* tan *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$*, avec :* $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

II.3 Réciproques des fonctions circulaires

Proposition-Définition II.24. *La restriction de la fonction* sin *à* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *est une bijection strictement croissante de* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1; 1]$.
Sa réciproque, appelée ***arc sinus****, notée* Arcsin*, réalise une bijection de* $[-1; 1]$ *sur* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$*. Elle est continue, strictement croissante et impaire sur* $[-1; 1]$.
Elle est dérivable sur $]-1; 1[$ *avec :* $\forall x \in]-1; 1[,\ \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Elle admet en -1 *et en* 1 *des demi-tangentes verticales.*

Démonstration. On utilise que $\sin' = \cos$, qui est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, s'annulant uniquement en $\pm\frac{\pi}{2}$.
Les propriétés (existence, croissance, continuité) découlent des propriétés de sin par théorème de la bijection monotone.

Montrons l'imparité de Arcsin : soit $y \in [-1;1]$. Notons $x = \text{Arcsin}(y)$, et donc $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ vérifie $\sin(x) = y$. Ainsi :

$$-y = -\sin(x) = \sin(-x).$$

Comme $(-x) \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, alors on a : $\text{Arcsin}(-y) = -x = -\text{Arcsin}(y)$, ce qui montre bien que Arcsin est impaire.

Étudions la dérivabilité de Arcsin. La fonction $\sin'$ ne s'annulant qu'en $\pm\dfrac{\pi}{2}$, on déduit que Arcsin est dérivable en tout point différent de $\sin(\pm\pi/2) = \pm 1$. Et en ± 1, la courbe de Arcsin admet des demi-tangentes verticales.

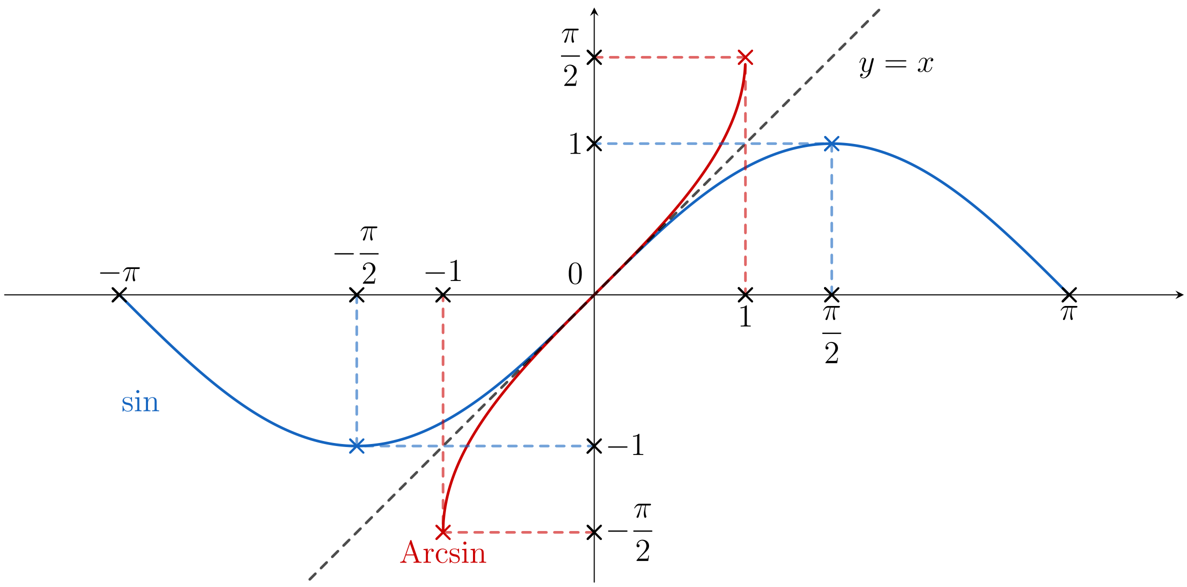
Reste la formule de la dérivée de Arcsin. Soit $y \in]-1;1[$. Posons $x = \text{Arcsin}(y)$. Par définition, on a : $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(x) \geq 0$. Donc : $\cos(x) = \sqrt{\cos^2(x)} = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{1-y^2}$. Et ainsi :

$$\text{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

□

Remarque II.25. *Si* $y \in [-1;1]$, *alors :* $\sin(\text{Arcsin}(y)) = y$.
En revanche, si $x \in \mathbb{R}$, *alors :* $\text{Arcsin}(\sin(x)) \neq x$, *à moins que* $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition II.26. *On a les représentations graphiques suivantes :*

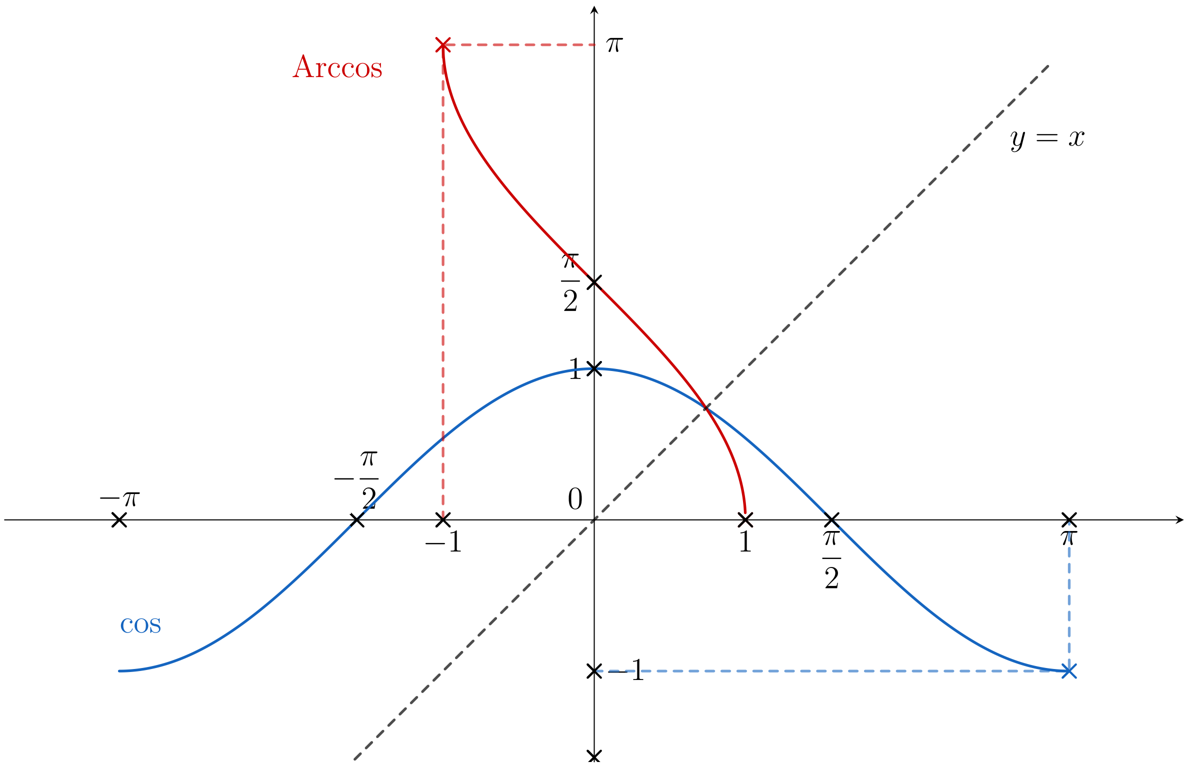


Proposition-Définition II.27. *La restriction de la fonction* cos *à* $[0;\pi]$ *est une bijection strictement décroissante de* $[0;\pi]$ *sur* $[-1;1]$.
Sa réciproque, appelée ***arc cosinus***, *notée* Arccos, *réalise une bijection de* $[-1;1]$ *sur* $[0;\pi]$. *Elle est continue et strictement décroissante sur* $[-1;1]$.
Elle est dérivable sur $]-1;1[$ *avec :* $\forall x \in]-1;1[,\ \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Elle admet en -1 *et en* 1 *des demi-tangentes verticales.*

Démonstration. Comme pour Arcsin. □

Remarque II.28. *Si* $y \in [-1;1]$, *alors :* $\cos(\text{Arccos}(y)) = y$.
En revanche, si $x \in \mathbb{R}$, *alors :* $\text{Arccos}(\cos(x)) \neq x$, *à moins que* $x \in [0;\pi]$.

Proposition II.29. *On a les représentations graphiques suivantes :*



Proposition-Définition II.30. *La restriction de la fonction* $\tan$ *à* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *est une bijection strictement croissante de* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$.
Sa réciproque, appelée ***arc tangente****, notée* Arctan*, réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$*. Elle est continue, strictement croissante et impaire sur* $\mathbb{R}$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ *avec :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. La stricte monotonie de tan sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ découle de l'expression de sa dérivée :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[,\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \geq 1 > 0.$$

On étudie les limites de tan en $\pm\frac{\pi}{2}$:
— en $-\frac{\pi}{2}^+$: on a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \sin(x) = -1 \text{ et } \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \cos(x) = 0^+$$

et donc : $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$;
— en $\frac{\pi}{2}^-$: on a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = 1 \text{ et } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+$$

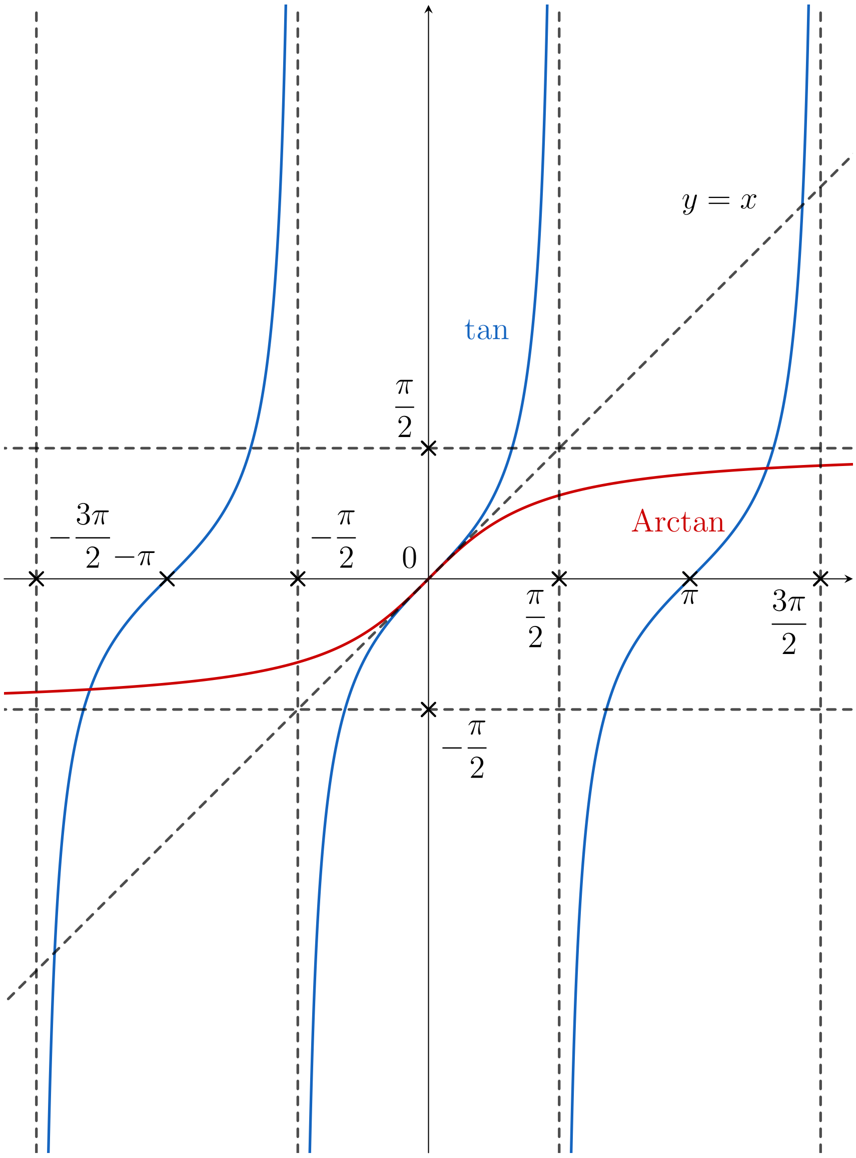
et donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$;
ce qui donne bien la bijectivité de tan de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ par théorème de la bijection monotone, ainsi que sa monotonie et la continuité.
L'imparité de Arctan découle de l'imparité de tan (et se démontre comme pour Arcsin).
Pour la dérivabilité, comme $\tan'$ ne s'annule jamais, alors Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan' \circ \mathrm{Arctan}(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\square$

Remarque II.31. *Si* $y \in \mathbb{R}$, *alors :* $\tan(\mathrm{Arctan}(y)) = y$.
En revanche, si $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, *alors :* $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) \neq x$, *à moins que* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Proposition II.32. *On a les représentations graphiques suivantes :*



Proposition II.33. *On a :*

1. $\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow (a \equiv b\ [2\pi]$ *ou* $a \equiv -b\ [2\pi]\ )$;
2. $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow (a \equiv b\ [2\pi]$ *ou* $a \equiv \pi - b\ [2\pi]\ )$;
3. $\tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow (a \equiv b\ [\pi]\ )$

Démonstration.

1. Par 2π-périodicité, on peut supposer $a, b \in]-\pi; \pi]$.
   Comme cos est strictement croissante sur $[-\pi; 0]$, strictement décroissante sur $[0; \pi]$, avec $\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$ et $\cos(0) = 1$, alors :
   — si $\cos(a) \neq \pm 1$: alors $\cos(a)$ possède deux antécédents par cos dans $]-\pi; \pi]$, qui sont a et $-a$;
   — si $\cos(a) = \pm 1$: alors $a = 0$ ou π, et a est l'unique antécédent de $\cos(a)$ par cos sur $]-\pi; \pi]$.
   Ce qui donne bien l'équivalence cherchée.
2. Le cas de sin se traite de la même manière en regardant les variations de sin sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.
3. Le cas de tan découle de la π-périodique et de la bijectivité de tan de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

□

Proposition II.34. *Si $x \in [-1;1]$, alors :*

$$\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration. Soit $x \in [-1;1]$. Posons : $a = \mathrm{Arccos}(x)$ et $b = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(x)$.
Alors $a, b \in [0;\pi]$ par définition des $\mathrm{Arccos}(x)$ et de $\mathrm{Arcsin}(x)$.
Et on a aussi : $\cos(b) = \sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$.
Donc par définition : b est un antécédent de x par cos dans $[0;\pi]$.
Donc $b = \mathrm{Arccos}(x) = a$. □

Démonstration. Autre démonstration.
Pour $x \in [-1;1]$, on a : $\mathrm{Arcsin}(x) \in [-\pi/2;\pi/2]$ et $\mathrm{Arccos}(x) \in [0;\pi]$ donc $\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) \in [-\pi/2;3\pi/2]$.
Sur $[-\pi/2;3\pi/2]$, la fonction sin ne prend qu'une seule fois la valeur 1, et c'est en $\pi/2$. On a donc :

$$\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x)\right) = 1.$$

Mais par formule d'addition :

$$\begin{array}{rcl} \sin\left(\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x)\right) & = & \sin(\mathrm{Arcsin}(x)) \cdot \cos(\mathrm{Arccos}(x)) + \sin(\mathrm{Arccos}(x)) \cdot \cos(\mathrm{Arcsin}(x)) \\ & = & x \cdot x - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} = 1 \end{array}$$

en notant que :
- $\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = \cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x$ par définition de Arcsin et Arccos ;
- $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, que l'on a déjà montré pour calculer la dérivée de Arcsin ;
- $\mathrm{Arccos}(x) \in [0;\pi]$ donc $\sin(\mathrm{Arccos}(x)) \geq 0$ puis :

$$\sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{\sin^2(\mathrm{Arccos}(x))} = \sqrt{1 - \cos^2(\mathrm{Arccos}(x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

ce qui prouve bien l'égalité voulue. □

Proposition II.35. *Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors :*

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

donc f est constante sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
On a : $f(1) = 2\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$ et $f(-1) = 2\mathrm{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
D'où le résultat. □

Remarque II.36. *On a décidé d'évaluer en ± 1 : on aurait pu aussi évaluer en $\pm\sqrt{3}$ (on tombe sur des valeurs de* tan *d'angles remarquables), ou utiliser les limites en 0 ou en $\pm\infty$.*

III Les fonctions hyperboliques

Définition III.1. *On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions :*

1. ***cosinus hyperbolique**, notée* ch, *par :* $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *;*
2. ***sinus hyperbolique**, notée* sh, *par :* $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ *;*

Remarque III.2. *Les fonctions* ch *et* sh *sont respectivement les parties paire et impaire de* exp *(suivant la décomposition de toute fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire).*

Proposition III.3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :* $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = e^x e^{-x} = 1.$$

□

Proposition III.4. *La fonction* ch *et paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée* sh.
Elle vérifie : $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$.

Démonstration. Si $x \in \mathbb{R}$, alors : $\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = \operatorname{ch}(x)$ donc ch est paire.
Elle est dérivable par combinaison linéaire et composée avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x).$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, on trouve les limites voulues par opérations sur les limites (pas de forme indéterminée) □

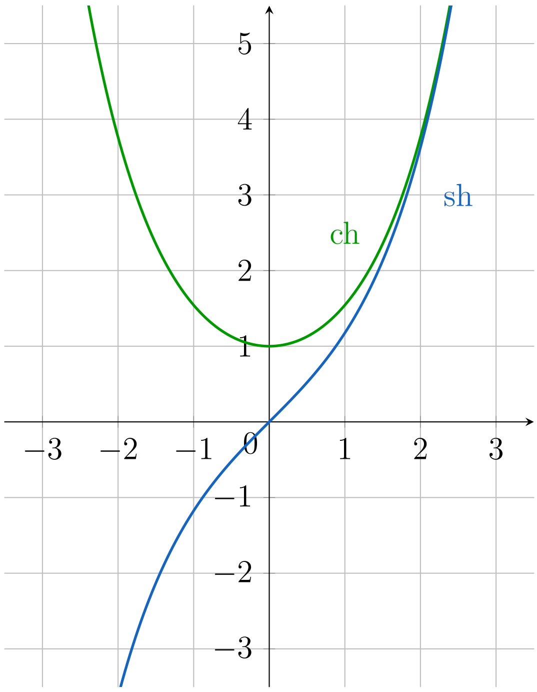
Proposition III.5. *La fonction* sh *et impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée* ch.
Elle vérifie : $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$.

Démonstration. Comme pour ch. □

Proposition III.6. *On a les tableaux de variations et les représentations graphiques suivants :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ch$'$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh$'$		$+$	1	$+$	
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$


5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−3 −2 −1 1 2 3
ch
sh

Chapitre 6

Les complexes

I L'ensemble $\mathbb{C}$

Définition I.1. *On note i une solution de l'équation $x^2+1=0$.*
*On définit alors l'ensemble $\mathbb{C}$ des **complexes** comme :*

$$\mathbb{C} = \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

*Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib$, on dit que a est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, et que b est la **partie imaginaire**, notée $\mathrm{Im}(z)$. Et l'écriture $z = a + ib$ est appelée **écriture algébrique** de z.*

Proposition I.2. *Un nombre complexe est entièrement déterminé par ses parties réelles et imaginaires, c'est-à-dire que :*

$$\forall a, a', b, b' \in \mathbb{R},\ a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & a' \\ b & = & b' \end{array} \right. .$$

Démonstration. Soient $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$. Alors :

$$a+ib = a'+ib' \Rightarrow (a-a') = i(b'-b) \Rightarrow 0 \leq (a-a')^2 = i^2(b'-b)^2 = -(b'-b)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 = (a-a')^2 = (b-b')^2$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & a' \\ b & = & b' \end{array} \right.$$

et la réciproque est immédiate, ce qui donne bien l'équivalence voulue. $\square$

Remarques I.3.

1. *Ce résultat assure que les parties réelle et imaginaire d'un complexe sont unique : elles sont entièrement déterminées par le complexe considéré.*
2. *L'ensemble des réels est l'ensemble des complexes de partie imaginaire nulle.*
3. *On appelle **imaginaires purs** l'ensemble $i\mathbb{R}$ des complexes de partie réelle nulle.*

Proposition I.4. *Si $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, on a les écritures algébriques :*

1. $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$;
2. $(a + iy) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

Proposition-Définition I.5 (Inverse)**.** *Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors il existe un unique $\omega \in \mathbb{C}^*$ tel que $z\omega = 1$: on l'appelle **l'inverse** de z, et on note $\omega = \frac{1}{z}$.*

Démonstration. On procède par analyse-synthèse. On pose $z = a + ib$ et $\omega = x + iy$.
Alors :

$$\begin{aligned} z\omega = 1 &\Rightarrow (ax - by) + i(bx + ay) = 1 \\ &\Rightarrow \begin{cases} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2x - aby &= a \\ aby + b^2x &= 0 \\ abx - b^2y &= b \\ abx + a^2y &= 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{a}{a^2+b^2} \\ y &= -\dfrac{b}{a^2+b^2} \end{cases} \end{aligned}$$

où $a^2 + b^2 \neq 0$ comme $z \neq 0$.
Réciproquement : $\omega = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$ vérifie bien $\omega z = 1$. □

Définition I.6. *Étant donné $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan, on associe à tout point $M(x, y)$ le complexe $z = x + iy$. On dit alors que z est* ***l'affixe*** *de M, ou que M est* ***l'image*** *du complexe z.*
On dira également que $z = x + iy$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
On appelle ***plan complexe*** *le plan muni de cette identification à $\mathbb{C}$.*

II Conjugaison et module

Définition II.1 (Conjugué complexe)**.** *Si $z = a + ib$ (forme algébrique), le complexe $\overline{z} = a - ib$ est appelé* ***conjugué (complexe)*** *de z.*

Proposition II.2. *Si $z \in \mathbb{C}$, alors $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.*

Corollaire II.3. *On déduit les équivalences suivantes :*

1. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$;
2. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}$;

Proposition II.4. *Si $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors :*

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
2. $\overline{\lambda z} = \lambda\overline{z}$;
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$;
4. *si* $z \neq 0$: $\overline{\dfrac{z'}{z}} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ *et* $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$;
5. $\overline{(\overline{z})} = z$.

Remarque II.5. *En particulier, on déduit que l'application $z \mapsto \overline{z}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$ qui est involutive (elle est bijective et c'est sa propre bijection réciproque).*

Définition II.6 (Module)**.** *Si $z = a + ib$ (forme algébrique), on appelle* ***module de*** *z le réel positif ou nul défini par :*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Proposition II.7. *Si $z \in \mathbb{C}$, alors : $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = |\overline{z}|$. Et ainsi :*

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

2. *si* $z \neq 0$: $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$;

3. *si* $z, z' \in \mathbb{C}$: $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ *et* $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ *(si* $z' \neq 0$*).*

Démonstration. Notons $z = a + ib$. Alors :

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

Le reste en découle. $\square$

Remarque II.8. *On déduit que, si* $z \in \mathbb{C}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$: $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$.

Corollaire II.9. *Pour* $z \in \mathbb{C}^*$*, on a l'équivalence :* $|z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

Proposition II.10. *Si* $z \in \mathbb{C}$: $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ *et* $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
De plus, on a égalité si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}$ *dans le premier cas, et* $z \in i\mathbb{R}$ *dans le second.*

Démonstration. Notons $z = a + ib$ (forme algébrique). Alors on a par positivité d'un carré de réel :

$$a^2 \leq a^2 + b^2 \text{ et } b^2 \leq a^2 + b^2$$

ce qui donne par croissance de la fonction racine carrée :

$$|\mathrm{Re}(z)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z| \text{ et } |\mathrm{Im}(z)| = |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|.$$

La stricte croissance de la fonction racine carrée donne que les cas d'égalité correspondent à $b^2 = 0$, donc $z \in \mathbb{R}$, dans le premier cas, et $a^2 = 0$, donc $z \in i\mathbb{R}$, dans le second. $\square$

Théorème II.11 (Inégalité triangulaire)**.** *Si* $z, z' \in \mathbb{C}$*, alors :*

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$;
2. $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

De plus, il y a égalité dans les deux cas si, et seulement si, z *et* z' *sont positivement liés :* $z' = 0$ *ou il existe* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $z = \lambda z'$.

Démonstration. Si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors :
— $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$;
— $|z-z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$;
— $(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\overline{z'}|$;
— $||z|-|z'||^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2|z\overline{z'}|$.
Les inégalités découlent de : $-2|z\overline{z'}| \leq \pm 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq 2|z\overline{z'}|$.
On a égalité dans la première si, et seulement si : $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = |zz'|$, c'est-à-dire $z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$. C'est déjà le cas si $z' = 0$. Sinon, cela revient à dire que :

$$z = \frac{z\overline{z'}}{\overline{z'}} = \underbrace{\frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}}_{\in \mathbb{R}_+} z' = \lambda z'$$

avec $\lambda = \dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} \in \mathbb{R}_+$.
Le cas d'égalité dans la seconde inégalité se traite de même. $\square$

Remarque II.12. *On les regroupe dans la double inégalité :*

$$||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|.$$

Corollaire II.13. *Si $z_1, \dots, z_n$ sont des complexes, alors :*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

avec égalité si, et seulement si, tous les z_k sont deux-à-deux positivement liés.

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour montrer la propriété $P(n)$: $\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, |\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité si, et seulement si, tous les z_k sont deux-à-deux positivement liés.

— pour $n = 1$: soir $z_1 \in \mathbb{C}$. Alors $|z_1| \leq |z_1|$, et c'est même une égalité. Ce qui prouve bien l'inégalité avec la bonne condition d'égalité, donc $P(1)$ est vraie ;

— soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est alors vraie.
Soient $z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| & = & |(\sum_{k=1}^{n} z_k) + z_{n+1}| \text{ par relation de Chasles} \\ & \leq & |\sum_{k=1}^{n} z_k| + |z_{n+1}| \text{ par inégalité triangulaire} \\ & \leq & \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| \text{ par hypothèse de récurrence} \\ & \leq & \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| \text{ par relation de Chasles} \end{array}$$

ce qui prouve déjà l'inégalité de $P(n+1)$.
Reste à étudier le cas d'égalité : c'est une égalité si, et seulement si :
— on a une égalité dans l'hypothèse de récurrence : donc tous les z_i pour $i \in [\![1; n]\!]$ sont deux-à-deux positivement liés ;
— on a une égalité dans l'inégalité triangulaire : donc z_{n+1} et $\sum_{k=1}^{n} z_k$ sont positivement liés ;
et ces deux conditions donnent bien ensemble que tous les z_i pour $i \in [\![1; n+1]\!]$ sont deux-à-deux positivement liés. D'où l'hérédité.

D'où la récurrence. □

III Trigonométrie et exponentielle complexe

III.1 Argument d'un complexe

Définition III.1. *On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :*

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Proposition III.2. *L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit, quotient et conjugaison :*

$$\forall z, z' \in \mathbb{U},\ zz' \in \mathbb{U},\ \frac{z}{z'} \in \mathbb{U} \text{ et } \overline{z} \in \mathbb{U}.$$

Démonstration. Découle des propriétés du module. □

Définition III.3 (Exponentielle complexe)**.** *On définit **l'exponentielle complexe** sur les imaginaires purs par :*

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Exemples III.4. *On a les valeurs particulières :*

$$e^{i0} = e^{2i\pi} = 1,\ e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1,\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i \text{ et } e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

Proposition III.5. *Si $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors :*

1. $e^{i(\theta_1 + 2k\pi)} = e^{i\theta_1}$;

2. $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$;
3. $e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$;
4. $\overline{e^{i\theta_1}} = e^{-i\theta_1}$;
5. $|e^{i\theta_1}| = 1$.

Démonstration. Découle des propriétés de cos et sin. Montrons par exemple l'exponentielle complexe d'une somme. On a :

$$\begin{array}{rcl} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} & = & (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))\,(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \\ & = & \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i\,(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2)) \\ & = & \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\ & = & e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{array}$$

□

Remarque III.6. *Cette propriété peut être utilisée pour retrouver les formules d'addition de* cos *et* sin *en développant* $e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Proposition III.7. *L'identification de $\mathbb{C}$ au plan $\mathbb{R}^2$ identifie l'ensemble $\mathbb{U}$ au cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (unique à 2π près) tel que :* $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$.

Démonstration. Si z est l'affixe de $M(x, y)$, alors :

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}.$$

Le reste découle de la paramétrisation de $\mathcal{C}$. □

Corollaire III.8. *La fonction définie de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi;\pi]$ sur $\mathbb{C}^*$ par : $(r,\theta) \mapsto re^{i\theta}$ est bijective.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrons que z possède un unique antécédent par l'application précédente :
- existence : comme $z \in \mathbb{C}^*$, alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ et on applique la proposition précédente ;
- unicité : si $z = r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$, alors : $r_1 = r_2$ car $|z| = r_1 = r_2$; et ainsi $\theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi]$, donc $\theta_1 = \theta_2$.

□

Définition III.9 (forme trigonométrique)**.** *Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$, pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Cette écriture s'appelle* ***forme trigonométrique****.*
Le réel r est unique, et est le module de z.
Le réel θ est unique à 2π près, et est ***un argument*** *de z.*
L'unique argument de z dans $]-\pi;\pi]$ est appelé ***argument principal*** *de z, et est noté* $\arg(z)$.

Proposition III.10. *Si $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors :*
1. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;
2. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$;
3. $\arg(\overline{z}) = \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;
4. $\arg(\lambda z) = \arg\left(\dfrac{z}{\lambda}\right) \equiv \begin{cases} \arg(z) & \text{si } \lambda > 0 \\ \arg(z) + \pi & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$.

Démonstration. Les résultats découlent des propriétés de l'exponentielle complexe. Détaillons la dernière. Soit $z = re^{i\theta}$ (forme trigonométrique) et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors :

$$\lambda z = \begin{cases} (\lambda r)e^{i\theta} & \text{si } \lambda > 0 \text{ avec } \lambda r > 0 \\ (-\lambda r)e^{i(\theta+\pi)} & \text{si } \lambda < 0 \text{ avec } (-\lambda r) > 0 \end{cases}$$

donc les écritures précédentes sont bien des formes trigonométriques, ce qui donne bien l'argument voulu.

□

Remarque III.11. *On déduit que $z, z' \in \mathbb{C}^*$ sont positivement liés si, et seulement si, ils ont même argument.*

III.2 Formules classiques

Proposition III.12 (Formules d'Euler)**.** *Si $\theta \in \mathbb{R}$, alors :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Méthode III.13. *Les formules d'Euler permettent de **linéariser** $\cos^n(\theta)$ ou $\sin^n(\theta)$:*

1. *on applique les formules d'Euler ;*
2. *on développe la puissance avec le binôme ;*
3. *on regroupe les termes pour faire apparaître des $\cos(k\theta)$ ou $\sin(k\theta)$ avec la formule d'Euler.*

Exemple III.14. *Linéariser $\cos^4(\theta)$:*

$$\begin{aligned} \cos^4(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4} \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} e^{ik\theta} e^{-i(4-k)\theta} \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{-4i\theta} + 4e^{-2i\theta} + 6 + 4e^{2i\theta} + e^{4i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left[e^{-4i\theta} + e^{4i\theta}) + 4(e^{-2i\theta} + e^{2i\theta}) + 6\right] \\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6\right) \\ &= \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8} \end{aligned}.$$

Proposition III.15 (Formules de l'angle moitié)**.** *Si $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, alors :*

1. $1 + e^{i\theta_1} = e^{i\frac{\theta_1}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta_1}{2}} + e^{-\frac{\theta_1}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1}{2}}$ *;*
2. $1 - e^{i\theta_1} = e^{i\frac{\theta_1}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta_1}{2}} - e^{-\frac{\theta_1}{2}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1}{2}}$ *;*
3. $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1}\left(1 + e^{i(\theta_2-\theta_1)}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$ *;*
4. $e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1}\left(1 - e^{i(\theta_2-\theta_1)}\right) = 2i\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$.

Remarque III.16. *On retrouve les formules de factorisation de sommes de* sin *ou* cos.

Méthode III.17. *Ces formules permettent de factoriser ou d'exprimer plus simplement des sommes d'exponentielles complexes, de* sin *ou de* cos.

Exemple III.18. *Calculer $C = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos((n-1)\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta)$.*
Posons $S = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\theta)$ et $E = C + iS$ (de sorte que $C = \mathrm{Re}(E)$ et $S = \mathrm{Im}(E)$).
Alors : $E = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\theta})^k$.

- *si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$: alors $E = n$, donc $C = n$ et $S = 0$;*
- *si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$: alors on a une somme géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$:*

$$\begin{aligned} E &= 1 \times \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{-2i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) e^{i\frac{n\theta}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i(n-1)\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Et donc :

$$C = \mathrm{Re}(E) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right) \text{ et } S = \mathrm{Im}(E) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right).$$

Proposition III.19 (Formules de Moivre)**.** *Si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :* $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$. *Et ainsi :*

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + \sin(\theta))^n .$$

Méthode III.20. *Les formules de Moivre permettent d'exprimer* $\cos(n\theta)$ *ou* $\sin(n\theta)$ *comme des polynômes en* $\cos(\theta)$ *et/ou* $\sin(\theta)$*.*

Exemple III.21. *Exprimer* $\cos(3\theta)$ *comme un polynôme en* $\cos(\theta)$ *:*

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 \\ &= \cos^3(\theta) + 3i\cos^2(x)\sin(\theta) + 3i^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) + i^3\sin^3(\theta) \\ &= \left(\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\right) + i\left(3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)\right) \end{aligned}$$

Et en identifiant les parties réelle et imaginaire, on trouve :

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \text{ et } \sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta) = -4\sin^3(\theta) + 3\sin(\theta).$$

Remarque III.22. *On peut toujours exprimer* $\cos(n\theta)$ *comme un polynôme en* $\cos(\theta)$*. On peut seulement exprimer* $\sin(n\theta)$ *comme un polynôme en* $\sin(\theta)$ *si n est impair.*

III.3 Exponentielle complexe

Définition III.23 (Exponentielle complexe)**.** *Si $z = x + iy$ (forme algébrique), on définit* ***l'exponentielle*** *de z par :*

$$\exp(z) = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos(y) + i\sin(y)) .$$

Remarque III.24. *Comme :* $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$, *alors* $e^x \cdot e^{iy}$ *est la forme trigonométrique de* e^z*. De sorte que :* $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ *et* $\arg(e^z) \equiv \mathrm{Im}(z)\ [2\pi]$.

Proposition III.25. *Si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors :*

1. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;
2. $e^{z-z'} = \dfrac{e^z}{e^{z'}}$;
3. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$;
4. $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) \equiv \mathrm{Im}(z')\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow (z - z') \in 2i\pi\mathbb{Z}.$

Proposition III.26. *Si $a \in \mathbb{C}$, alors l'équation $e^z = a$:*

— *n'a pas de solution si $a = 0$;*
— *a une infinité de solutions si $a \neq 0$, à savoir :* $\{\ln|a| + i(\arg(a) + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

IV Résolution d'équations algébriques

IV.1 Racines n-èmes

Définition IV.1. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, et $a \in \mathbb{C}$, on dit que z est* ***une racines n-ème de*** *a si $z^n = a$.*
Lorsque $a = 1$, on parle de ***racine n-ème de l'unité****, et on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ème de l'unité.*

Proposition IV.2. *L'ensemble $\mathbb{U}_n$ possède n éléments :*

$$\mathbb{U}_n = \left\{\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0; n-1]\!]\right\}.$$

Démonstration. Comme $0^n = 0$, alors $0 \notin \mathbb{U}_n$.
Soit $z \neq 0$. On écrit $z = re^{i\theta}$ (forme trigonométrique) :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{U}_n &\Leftrightarrow z^n = 1 \\ &\Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = 1 \cdot e^{i0} \\ &\Leftrightarrow r^n = 1 \text{ et } n\theta \equiv 0 \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt[n]{1} = 1 \text{ (car } r > 0) \text{ et } n\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ce qui donne la première égalité.
La seconde se déduit par 2π-périodicité de $\theta \mapsto e^{i\theta}$. □

Exemples IV.3.

1. $\mathbb{U}_2 = \{\pm 1\}$;
2. $\mathbb{U}_3 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\} = \{1, j, j^2\}$ *avec* $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$;
3. $\mathbb{U}_4 = \{\pm 1,\ \pm i\}$.

Corollaire IV.4. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$, alors a possède exactement n racines n-èmes. Si l'on note $a = re^{i\theta}$, leur ensemble est :*

$$\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0; n-1]\!] \right\} = \{z_0 \times \omega \mid \omega \in \mathbb{U}_n\}$$

où z_0 est une racine n-ème quelconque de a.

Démonstration. Il est immédiat que les $\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ sont des racines de a.
Réciproquement, si z_0 est une racine n-ème de a, alors $z_0 \neq 0$ et :

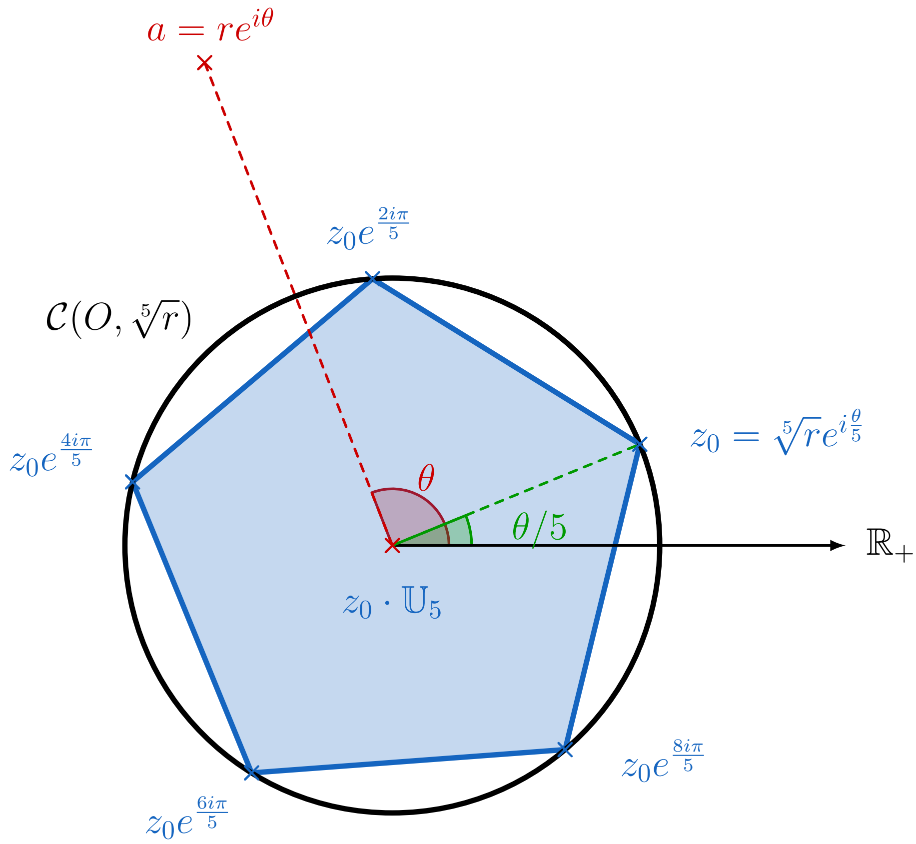
$$z^n = a \Leftrightarrow z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$$

ce qui donne le résultat. □

Proposition IV.5. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$, alors la somme des racines n-èmes de a vaut 0.*

Démonstration. On fait apparaître une somme géométrique de raison $e^{\frac{2i\pi}{n}}$. □

Remarque IV.6. *Les racines n-ème de a sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O de rayon $\sqrt[n]{|a|}$:*



Le barycentre de ces points est l'origine du plan, ce qui illustre :

$$\sum_{z\in\mathbb{C},\ z^n=a} z = 0.$$

Exemple IV.7. *Calculons le cosinus et le sinus de* $\frac{2\pi}{5}$.
Considérons les racines 5*-èmes de l'unité :* $1, e^{\pm\frac{2i\pi}{5}}, e^{\pm\frac{4i\pi}{5}}$. *Comme leur somme vaut* 0*, on déduit que :*

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$

Par formule de duplication, on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$*, et donc* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ *est solution de l'équation :*

$$4x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Les solutions sont $\dfrac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \dfrac{\pm\sqrt{5}-1}{4}$.

Comme $\frac{2\pi}{5} \in [0; \frac{\pi}{2}]$*, alors* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$*, et donc :* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.
Comme $\frac{2\pi}{5} \in [0; \frac{\pi}{2}]$*, alors* $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$*, et donc :*

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

IV.2 Racines carrées

Méthode IV.8. *On note* $z = x + iy$ *une racine carrée de* $a + ib$ *(c'est-à-dire que* $z^2 = a + ib$*). Trouver* z *revient à résoudre (dans* $\mathbb{R}^2$*) le système :*

$$\left\{\begin{array}{rcll} x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} & \text{(en regardant le module)} \\ x^2 - y^2 & = & a & \text{(en regardant la partie réelle)} \\ 2xy & = & b & \text{(en regardant la partie imaginaire)} \end{array}\right. .$$

On trouve x et y (au signe près) avec les deux premières égalités. On trouve le signe avec la dernière.

Exemple IV.9. *Trouver les racines carrées de $-5+12i$: on les cherche sous la forme $z = x+iy$. On a :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & \sqrt{5^2+12^2} = 13 \\ x^2-y^2 & = & -5 \\ 2xy & = & 12 \end{array}\right. .$$

Et ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & 4 \\ y^2 & = & 9 \\ xy & > & 0 \text{ donc } x,y \text{ de même signe} \end{array}\right. .$$

Donc les deux racines carrées de $-5+12i$ sont $2+3i$ et $-2-3i$.

Proposition IV.10. *Soient $a,b,c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2-4ac$ et δ une racine carrée de Δ. Alors l'équation $az^2+bz+c=0$ admet :*

1. *une seule solution si $\Delta = 0$, à savoir $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$;*
2. *deux solution si $\Delta \neq 0$, à savoir : $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} az^2+bz+c=0 &\Leftrightarrow a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right]=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\delta}{2a} \\ &\Leftrightarrow z=\frac{-b\pm\delta}{2a} \end{aligned}$$

□

Proposition IV.11 (Relations coefficients-racines)**.** *Si $a,b,c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, et que z_1, z_2 sont les solutions (éventuellement confondues) de l'équation $az^2+bz+c=0$, alors :*

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \text{ et } z_1+z_2 = -\frac{b}{a}.$$

De plus, on a : $az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

Corollaire IV.12 (Systèmes somme-produit)**.** *Si $s,p \in \mathbb{C}$, les solutions du système :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & s \\ xy & = & p \end{array}\right.$$

sont les couples de complexes formant les solutions de l'équation $z^2-sz+p=0$, c'est-à-dire :
- *les couples (r_1,r_2) et (r_2,r_1) si l'équation admet deux solutions $r_1,r_2 \in \mathbb{C}$;*
- *le couple (r,r) si $r \in \mathbb{C}$ est l'unique solution de l'équation.*

Exemple IV.13. *On considère le système :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 3+3i \\ xy & = & 5i \end{array}\right.$$

On lui associe l'équation : $z^2-(3+3i)z+5i$.
On a : $\Delta = -2i$, donc $\delta = 1-i$ est une racine carrée de Δ.
Donc $z_{1,2} = \dfrac{3+3i \pm (1-i)}{2} = 2+i$ ou $1+2i$.
Et les solutions du système sont $(2+i, 1+2i)$ et $(1+2i, 2+i)$.

IV.3 Équations polynomiales

Définition IV.14. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle* ***fonction polynomiale à coefficients complexes de degré*** *n une fonction $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, où $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$.*
Une ***racine*** *de P est une solution de l'équation $P(z) = 0$.*

Proposition IV.15 (Factorisation des polynômes)**.** *Si $n \geq 1$ et si z_0 est une racine de P, alors il existe une fonction polynomiale Q de degré $n-1$ telle que :*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z - z_0)Q(z).$$

Théorème IV.16 (d'Alembert–Gauss)**.** *Toute fonction polynomiale à coefficients complexes de degré ≥ 1 possède une racine dans $\mathbb{C}$.*

Remarque IV.17. *Il faut être dans $\mathbb{C}$: la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ par exemple.*

Corollaire IV.18. *Si P est une fonction polynomiale à coefficients complexes de degré $n \geq 1$, alors il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que :*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

V Interprétation géométrique des nombres complexes

Proposition V.1. *Si A, B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. Sa norme vaut $|z_B - z_A|$ et son angle avec l'axe (O, x) est $\arg(z_B - z_A)$.*
Plus généralement, si C est un autre point d'affixe z_C, alors l'angle $\widehat{BAC} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est égal à $\arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.

Proposition V.2. *On a les équivalences :*

1. *A, B, C alignés $\Leftrightarrow \left(\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\ [\pi]\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}\right)$;*
2. *(AB) et (CD) sont perpendiculaires $\Leftrightarrow \left(\arg\left(\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}\right)$.*

Proposition V.3. *On a les transformations suivantes du plan :*

1. *l'application $z \mapsto \overline{z}$ est la* ***symétrie*** *d'axe (Ox) ;*
2. *si $b \in \mathbb{C}$, l'application $z \mapsto z + b$ est la* ***translation*** *du vecteur d'affixe b ;*
3. *si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z_A \in \mathbb{C}$, l'application $z \mapsto \lambda(z - z_A) + z_A$ est* ***l'homothétie*** de centre A (d'affixe z_A) et de rapport λ ;
4. *si $\theta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$, l'application $z \mapsto e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ est la* ***rotation*** *de centre Ω (d'affixe ω) et d'angle θ.*

Proposition V.4. *On considère l'application $f : z \mapsto az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Alors :*

1. *si $a = 1$: alors il s'agit d'une translation de vecteur d'affixe b ;*
2. *si $a \neq 1$: elle possède un unique point fixe Ω, dont l'affixe ω vérifie $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, et f est la composée de la rotation de centre Ω d'angle $\arg(a)$ et de l'homothétie de centre Ω de rapport $|a|$ (dans l'ordre que l'on veut).*

Démonstration.

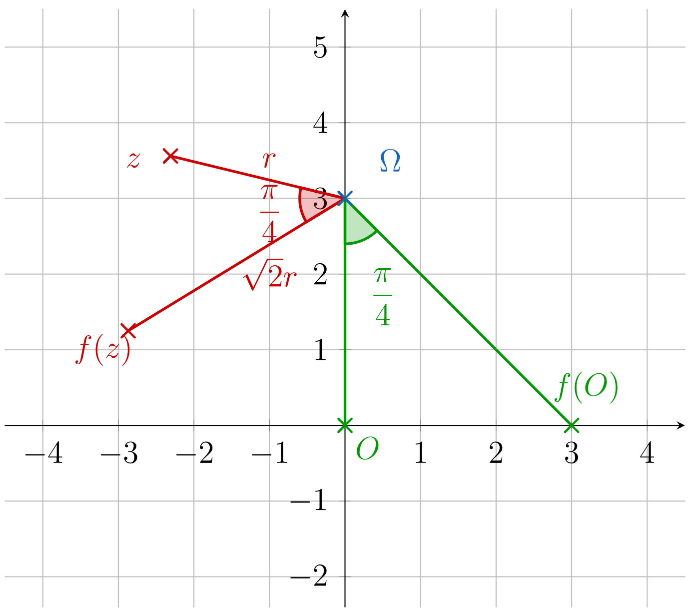
1. le cas $a = 1$ est déjà donné avant ;
2. si $a \neq 1$: alors $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ vérifie bien $f(\omega) = \omega$. On note : $a = \lambda e^{it}$, $h : z \mapsto \lambda(z-\omega)+\omega$ l'homothétie de centre Ω de rapport λ, et $r : z \mapsto e^{it}(z-\omega)+\omega$ la rotation de centre Ω d'angle t. Alors :
$$(h \circ r)(z) = \frac{b}{1-a} + \underbrace{\lambda e^{it}}_{=a}\left(z - \frac{b}{1-a}\right) = az + \frac{b-ab}{1-a} = az+b = f(z)$$

□

Exemple V.5. *On considère l'application* $f : z \mapsto (1+i)z+3$. *Alors :*

— *l'unique point fixe de* f *est le point* Ω *d'affixe* $\dfrac{3}{1-(1+i)} = \dfrac{3}{-i} = 3i$ *;*

— f *est la composée de l'homothétie de centre* Ω *de rapport* $|1+i| = \sqrt{2}$ *et de la rotation de centre* Ω *d'angle* $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$.



VI Fonction complexe d'une variable réelle

Définition VI.1. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *et* $\varphi : I \to \mathbb{C}$. *On note* φ_1 *et* φ_2 *les parties réelle et imaginaire de* φ, *c'est-à-dire les fonctions définies de* I *sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\forall t \in I,\ \varphi_1(t) = \mathrm{Re}(\varphi(t))$ *et* $\varphi_2(t) = \mathrm{Im}(\varphi(t))$ *(de sorte que* $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$*).*
On dit que φ *est continue (resp. dérivable) en* $t_0 \in I$ *si* φ_1 *et* φ_2 *le sont. Et pour la dérivabilité, on pose :*
$$\varphi'(t_0) = \varphi_1'(t_0) + i\varphi_2'(t_0).$$

Proposition VI.2. *Si* f, g *sont des fonctions dérivables sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{C}$, *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *alors on a les fonctions dérivées suivantes :*

1. $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ *(la dérivation est linéaire) ;*
2. $(fg)' = f'g + fg'$ *;*
3. *si* g *ne s'annule pas :* $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$ *;*
4. *si* g *ne s'annule pas :* $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Démonstration. Toutes les formules découlent de la dérivabilité des fonctions à valeurs réelles, en ramenant le calcul à des dérivées de combinaisons linéaires, produits ou quotient de fonctions réelles. Montrons par exemple la formule pour le produit et l'inverse.
Soient f, g deux fonctions à valeurs complexes dérivables sur I, et notons $f_1 = \mathrm{Re}(f)$, $f_2 = \mathrm{Im}(f)$, $g_1 = \mathrm{Re}(g)$ et $g_2 = \mathrm{Im}(g)$. De sorte que :

$$fg = (f_1 + if_2) \cdot (g_1 + ig_2) = (f_1g_1 - f_2g_2) + i(f_1g_2 + f_2g_1).$$

Par dérivée d'un produit (pour les fonctions à valeurs réelles), on déduit que $\mathrm{Re}(fg)$ et $\mathrm{Im}(fg)$ sont dérivables, donc fg aussi, de dérivée :

$$(fg)' = (f_1'g_1 + f_1g_1' - f_2'g_2 - f_2g_2') + i\,(f_1'g_2 + f_1g_2' + f_2'g_1 + f_2g_1')$$

tandis que l'on a :

$$\begin{array}{rcl} f'g & = & (f_1' + if_2') \cdot (g_1 + ig_2) \\ & = & (f_1'g_1 - f_2'g_2) + i \cdot (f_1'g_2 + f_2'g_1) \\ fg' & = & (f_1 + if_2) \cdot (g_1' + ig_2') \\ & = & (f_1g_1' - f_2g_2') + i \cdot (f_1g_2' + f_2g_1') \end{array}$$

ce qui donne bien l'égalité voulue pour le produit.
Pour l'inverse, on reprend les mêmes notations, en supposant que g ne s'annule pas. On a ainsi :

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{g_1 + ig_2} = \frac{g_1}{g_1^2 + g_2^2} + i\frac{-g_2}{g_1^2 + g_2^2}$$

Par dérivée d'un quotient dont le dénominateur ne s'annule pas (pour une fonction à variable réelle), les parties réelle et imaginaires de $\dfrac{1}{g}$ sont dérivables, de dérivées respectives :

$$\frac{g_1'(g_1^2 + g_2^2) - g_1(2g_1'g_1 + 2g_2'g_2)}{(g_1^2 + g_2^2)^2} = \frac{g_1'g_2^2 - g_1'g_1^2 - 2g_2'g_1g_2}{(g_1^2 + g_2^2)^2} \text{ et } \frac{-g_2'g_1^2 + g_2'g_2^2 + 2g_1'g_1g_2}{(g_1^2 + g_2^2)^2}$$

ce qui assure que $\dfrac{1}{g}$ est bien dérivable. Et de plus on a :

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{g'}{g^2} & = & -\dfrac{g_1' + ig_2'}{(g_1 + ig_2)^2} = -\dfrac{(g_1' + ig_2')(g_1 - ig_2)^2}{(g_1^2 + g_2^2)^2} \\ & = & \dfrac{g_1'g_2^2 - g_1'g_1^2 - 2g_2'g_1g_2}{(g_1^2 + g_2^2)^2} + i\dfrac{-g_2'g_1^2 + g_2'g_2^2 + 2g_1'g_1g_2}{(g_1^2 + g_2^2)^2} \end{array}$$

ce qui donne bien l'égalité voulue pour l'inverse. □

Proposition VI.3. *Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ dérivable. Alors la fonction $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\varphi(t)} \end{array} \right.$ est dérivable sur I, avec : $\forall t \in I,\ \psi'(t) = \varphi'(t)e^{\varphi(t)}$.*

Démonstration. On pose $\varphi_1 = \mathrm{Re}(\varphi)$ et $\varphi_2 = \mathrm{Im}(\varphi)$.
Si $x \in I$:

$$\psi(t) = e^{\varphi_1(t)}e^{i\varphi_2(t)} = e^{\varphi_1(t)}\left(\cos(\varphi_2(t)) + i\sin(\varphi_2(t))\right).$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \psi_1(t) & = & \mathrm{Re}(\psi(t)) & = & e^{\varphi_1(t)}\cos(\varphi_2(t)) \\ \psi_2(t) & = & \mathrm{Im}(\psi(t)) & = & e^{\varphi_1(t)}\sin(\varphi_2(t)) \end{array} \right. .$$

Comme φ est dérivable, φ_1 et φ_2 aussi, donc ψ_1 et ψ_2 aussi. Et on a :

$$\forall t \in I,\ \left\{ \begin{array}{rcl} \psi_1'(t) & = & e^{\varphi_1(t)}\left[\varphi_1'(t)\cos(\varphi_2(t)) - \varphi_2'(t)\sin(\varphi_2(t))\right] \\ \psi_2'(t) & = & e^{\varphi_1(t)}\left[\varphi_1'(t)\sin(\varphi_2(t)) + \varphi_2'(t)\cos(\varphi_2(t))\right] \end{array} \right. .$$

Donc ψ est dérivable, avec pour tout $t \in I$:

$$\begin{array}{rcl} \psi'(t) & = & \psi_1(t) + i\psi_2(t) \\ & = & e^{\varphi_1(t)}\left[(\varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t))\cos(\varphi_2(t)) + (-\varphi_2'(t) + i\varphi_1'(t))\sin(\varphi_2(t))\right] \\ & = & e^{\varphi_1(t)}(\varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t))e^{i\varphi_2(t)} \\ & = & \varphi'(t)e^{\varphi(t)} \end{array}$$

□

Exemple VI.4. *Si* $\alpha \in \mathbb{C}$*, la fonction* $f : t \mapsto \exp(\alpha \ln(t))$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$*. Si* $t \in \mathbb{R}_+^*$*, alors :*

$$f'(t) = \frac{\alpha}{t}\exp(\alpha\ln(t)) = \alpha\exp((\alpha - 1)\ln(t))$$

c'est-à-dire que, avec l'abus de notation $f(t) = t^\alpha$*, on trouve :* $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$.

Chapitre 7

Primitives

I Primitives et intégrales

I.1 Généralités sur les primitives

Définition I.1. *Si f est définie sur un intervalle I, on dit qu'une fonction F dérivable sur I est une **primitive** de f si $F' = f$.*

Exemples I.2.

1. *$x \mapsto x^3$ ou $x \mapsto x^3 - 4$ sont des primitives de $x \mapsto 3x^2$ sur n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}$;*
2. *$x \mapsto \operatorname{signe}(x)\frac{x^2}{2} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est une primitive de $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.*

Proposition I.3. *Si I est un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I, alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $F + \lambda$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Si F est une primitive de f, et G une fonction dérivable sur I, alors :

$$G \text{ primitive de } f \Leftrightarrow G' = F' \Leftrightarrow (G - F)' = 0 \Leftrightarrow G - F \text{ est constante.}$$

□

Remarques I.4.

1. *Ce résultat dit que, s'il existe une primitive, il en existe un infinité. Mais il ne dit pas qu'il en existe.*
2. *Le résultat est faux si I n'est plus un intervalle. Par exemple, les restrictions à $\mathbb{R}^*$ des fonctions $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}$ sont des primitives de la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais ne diffèrent pas d'une constante. Mais il permet quand même de chercher des primitives : par exemple pour chercher une primitive de $x \mapsto |x|$, on peut regarder les primitives de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}_+$ et de $x \mapsto -x$ sur $\mathbb{R}_-$, puis chercher à recoler ces primitives en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Théorème I.5 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Si f est continue sur un intervalle I, alors f admet une primitive.*

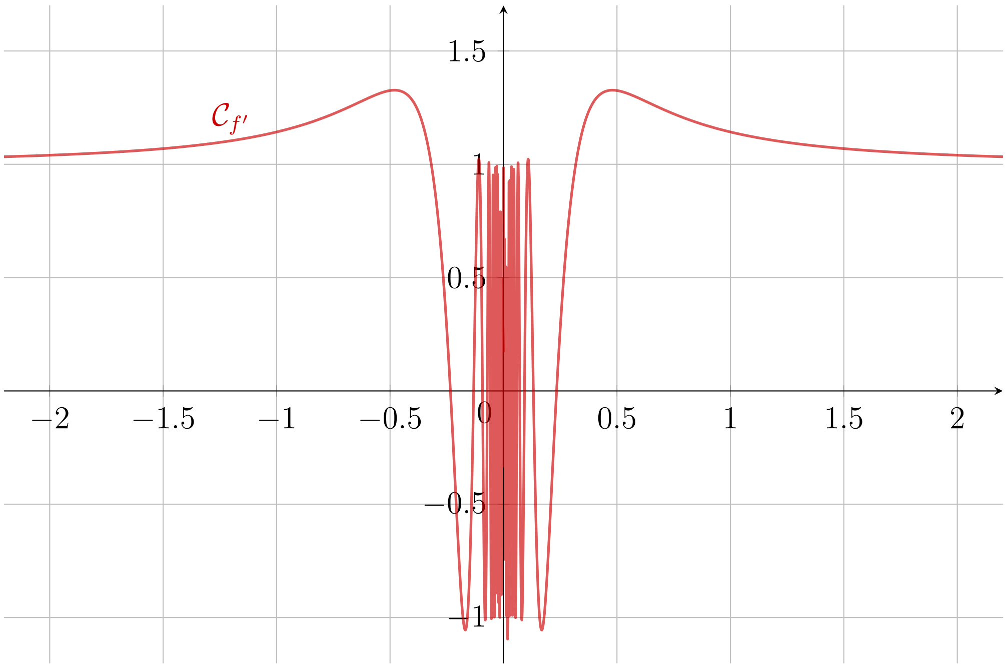
Démonstration. Admis (pour le moment). □

Corollaire I.6. *Si f est continue sur un intervalle I et $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.*

Remarque I.7. *Il existe des fonctions non continues qui ont des primitives. Considérons par exemple la fonction* $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
La fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *:*

- *sur* $\mathbb{R}^*$ *: par composée et produit,* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *avec :* $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
- *en* 0 *:* $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ *par encadrement. Donc* f *est dérivable en* 0 *avec* $f'(0) = 0$

Mais f *est une primitive de* f' *(qui est bien définie), c'est-à-dire que* f' *admet une primitive sur* $\mathbb{R}$*. Mais* f' *n'est pas continue en* 0 *car* $f'(x)$ *n'a pas de limite quand* x *tend vers* 0.
En effet : $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *tend vers* 0 *en* 0 *(par encadrement) mais* $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'a pas de limite en* 0 *(car* $\cos$ *n'a pas de limite en* $+\infty$*).*



I.2 Intégrale d'une fonction continue

Proposition-Définition I.8. *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* I*, et* F *une primitive de* f *sur* I*. Si* $a, b \in I$*, alors la quantité :*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ne dépend pas du choix de F*, et sera appelée* ***l'intégrale de*** f ***entre*** a ***et*** b.

Démonstration. Il suffit de voir que cette quantité ne dépend pas du choix de F. Soient G, F deux primitives de f sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + \lambda$.
Alors : $G(b) - G(a) = F(b) + \lambda - F(a) - \lambda = F(b)F(a)$. □

Remarques I.9.

1. *On donnera une autre définition de l'intégrale (pour des fonctions plus générales que les fonctions continues). Et on verra que les deux définitions coïncident.*
2. *Une intégrale est un peu comme une somme : la variable d'intégration correspond à l'indice de sommation. On peut donc changer sa dénomination, et il n'a pas de sens hors de l'intégrale.*
3. *Cette définition n'a de sens que si* f *est continue (donc* f *doit avoir une primitive de classe* $\mathcal{C}^1$*).*

Proposition I.10. *Si* f, g *sont deux fonctions continues sur le segment* $[a; b]$*, et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, alors :*

1. $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) + \mu \left(\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right)$ *(linéarité de l'intégrale) ;*
2. *si* $c \in [a;b]$: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ *(relation de Chasles) ;*
3. $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$ *;*
4. *si* $f \geq 0$ *sur* $[a;b]$: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$ *(positivité de l'intégrale) ;*
5. *si* $f \geq g$ *sur* $[a;b]$: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ *(croissance de l'intégrale).*

Démonstration.

1. par linéarité de la dérivation, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu G$, et donc :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t &= \lambda F(b) + \mu G(b) - \lambda F(a) - \mu G(a) = \lambda (F(b) - F(a)) + \mu (G(b) - G(a)) \\ &= \lambda \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) + \mu \left(\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

2. $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$;
3. $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$;
4. si $f \geq 0$, alors F est croissante, donc $F(b) \geq F(a)$ et ainsi : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \geq 0$;
5. on applique le résultat précédent à $f - g$.

□

Remarque I.11. *La croissance de l'intégrale veut dire que l'on peut intégrer une inégalité entre deux bornes dans le bon ordre.*
En revanche, on ne dérive ***jamais*** *une inégalité. Et donc, lorsqu'on intègre une inégalité, le signe* $\Leftrightarrow$ *est à proscrire.*

Proposition I.12. *Si* f *est continue de signe constant sur* $[a;b]$*, alors :*

$$f = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Démonstration. La première implication découle de la linéarité car alors $f = 0 \cdot f$.
Réciproquement, si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$: on peut supposer $f \geq 0$ sur $[a;b]$ (quitte à changer f en $-f$). On a donc : $F(b) = F(a)$. Mais F est croissante sur $[a;b]$, comme $F' = f \geq 0$, donc F est constante. Et donc $f = F' = 0$. □

Théorème I.13. *Si* f *est une fonction continue sur un intervalle* I*, et* $a \in I$*, alors l'application* $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ *est l'unique primitive de* f *sur* I *qui s'annule en* a*.*

Démonstration. Notons G une primitive de f. Alors, si $x \in I$: $F(x) = G(x) - G(a)$. Et donc $F'(x) = G'(x) = f(x)$ et $F(a) = G(a) - G(a) = 0$. Donc F vérifie bien les conditions imposées.
L'unicité provient du (corollaire du) théorème fondamental de l'analyse. □

Remarque I.14. *Toutes les primitives de* f *sont de la forme* $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \lambda$*. Pour éviter un choix arbitraire pour* a *et* λ*, on notera* $\int^x f(t)\mathrm{d}t$ *une* ***primitive générique*** *de* f

Proposition I.15 (Intégrales dépendant de leurs bornes)**.** *Si* I, J *sont deux intervalles,* u, v *deux fonctions dérivables sur* I *à valeurs dans* J*, et* f *continue sur* J*.*
Alors la fonction φ *définie sur* I *par :* $\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ *est dérivable sur* I*, avec :*

$$\forall x \in I,\ \varphi'(x) = v'(x) \cdot f(v(x)) - u'(x) \cdot f(u(x)).$$

Démonstration. Si F est une primitive de f sur J, alors : $\varphi(x) = F(v(x)) - F(u(x))$, qu'on peut dériver comme une composée. □

Corollaire I.16. *Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$:*

1. *si f est impaire, alors : $\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0$;*
2. *si f est T-périodique, alors : $\int_{x}^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.*

Démonstration. On dérive par rapport à x :

1. si $\varphi(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, alors $\varphi'(x) = f(x) + f(-x) = 0$, donc φ est constante, de valeur $\varphi(0) = 0$;
2. si $\varphi(x) = \int_{x}^{T+x} f(t)\mathrm{d}t$, alors $\varphi'(x) = f(T+x) - f(x) = 0$, donc φ est constante, de valeur $\varphi(0) = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

□

Remarque I.17. *Le premier résultat dit en fait que toute primitive d'une fonction continue impaire est paire. Considérons en effet f impaire, F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$F(x) - F(-x) = \int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0$$

donc $F(x) = F(-x)$. Ce qui assure bien la parité.

Exemple I.18. *Calculons $I = \int_0^\pi \cos^2(t)\mathrm{d}t$. Par π-périodicité de $t \mapsto \sin^2(t)$:*

$$I = \int_0^\pi \sin^2(\pi/2 + t)\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin^2(t)\mathrm{d}t$$

et donc $I + I = \int_0^\pi \left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \mathrm{d}t = \pi$. Donc $I = \frac{\pi}{2}$.

II Calcul de primitives et d'intégrales

II.1 Calcul direct

Théorème II.1. *On a les primitives usuelles suivantes :*

$f(x)$	D_f	$F(x)$
0	$\mathbb{R}$	0
$c\ (c \in \mathbb{C}^*)$	$\mathbb{R}$	cx
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$x^n\ (n \in \mathbb{Z},\ n \leq -2)$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ *cas particulier :* $\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$ $\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $2\sqrt{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}^*$	$x\ln(\lvert x\rvert) - x$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$\mathrm{Arcsin}(x)$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$\mathrm{Arccos}(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{Arctan}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$

Remarque II.2. *En pratique, on n'aura pas dès le départ les écritures précédentes : on utilisera la linéarité de l'intégrale et la proposition suivante.*

Proposition II.3. *Si $u : I \to J$ et φ définie sur J sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, alors la fonction $u' \cdot (\varphi' \circ u)$ est continue, et admet pour primitive $\varphi \circ u$.*

Démonstration. Par dérivée d'une composée. □

Corollaire II.4. *Si u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I :*

1. *pour $n \in \mathbb{N}$, une primitive de $u' \cdot u^n$ sur I est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$;*
2. *une primitive de $u' \cdot e^u$ sur I est e^u ;*
3. *si u ne s'annule pas sur I, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I est $\ln(|u|)$;*
4. *si $u > 0$ sur I et que $\alpha \neq -1$, alors une primitive de $u' \cdot u^\alpha$ est $\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$.*

Exemples II.5.

1. $xe^{-x^2} = \frac{-1}{2} \cdot (-2x)e^{-x^2}$, *donc une primitive de $x \mapsto xe^{-x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$;*
2. $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}$, *donc une primitive de $\tan$ est $x \mapsto -\ln(|\cos(x)|)$;*
3. $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}} = e^x \cdot \dfrac{1}{1+(e^x)^2}$, *donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ est $\mathrm{Arctan} \circ \exp$.*

Remarque II.6. *On peut créer d'autres formules du même type, mais qu'on rencontre moins souvent. Comme par exemple qu'une primitive de $u' \cdot \cos(u)$ est $\sin(u)$. Par rapport au tableau, cela revient à changer tous les x en $u(x)$ et de multiplier la colonne de gauche par $u'(x)$.*

Corollaire II.7. *Soient F est une primitive d'une fonction continue f, et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors, là où elle est définie, la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est continue et admet pour primitive $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax+b)$.*

Exemples II.8.

1. *Si on note F une primitive de $t \mapsto \sin^2(t)$ sur $\mathbb{R}$, alors $t \mapsto F(\frac{\pi}{2}+t)$ est une primitive de $t \mapsto \sin^2(t+\frac{\pi}{2})$. Ainsi on retrouve que :*
$$\int_0^\pi \sin^2(\pi/2+t)\mathrm{d}t = F(\frac{3\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{2}) = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2(t)\mathrm{d}t$$
qu'on avait énoncé précédemment sans le justifier.
2. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, alors une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{(ax+b)^2+1}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{Arctan}(ax+b)$.*
Calculons une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+2}$. On a : $\dfrac{1}{x^2+2x+2} = \dfrac{1}{(x+1)^2+1}$. Donc une primitive est : $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x+1)$.
Calculons une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+5}$. On a : $\dfrac{1}{x^2+2x+5} = \dfrac{1}{(x+1)^2+4} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2+1}$.
Donc une primitive est : $x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

II.2 Intégration par parties

Théorème II.9 (Intégration par parties)**.** *Si u, v sont deux fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, alors :*
$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Par dérivée d'un produit, une primitive de $u'v + v'u$ est uv. Et ainsi :

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

□

Remarque II.10. *En pratique, pour être que cette formule soit utile, il faudra que v' soit facile à primitiver, tandis que le fait de dériver u ne rende pas la fonction à intégrer plus compliquée.*

Corollaire II.11. *Si u, v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $x \in I$, alors :*

$$\int^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

Exemples II.12.

1. $\int_0^1 \underbrace{t}_{v}\underbrace{e^t}_{u'}\mathrm{d}t = [te^t]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{v'}\underbrace{e^t}_{u}\mathrm{d}t = e^1 - 0 - (e^1 - 1) = 1$;
2. $\int_0^{\pi/2} \underbrace{t^2}_{v}\underbrace{\sin(t)}_{u'}\mathrm{d}t = \cancel{[-t^2\cos(t)]_0^{\pi/2}} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{2t}_{v'}\underbrace{(-\cos(t))}_{u}\mathrm{d}t = [2t\sin(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\sin(t)\mathrm{d}t = \pi - 2$ *(en faisant deux intégrations par parties successives) ;*
3. *si $I = \int_0^1 \mathrm{Arctan}(t)\mathrm{d}t$: on pose $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{Arctan}(t)$ (donc $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$). On trouve :*

$$I = [t\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \mathrm{Arctan}(1) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$$

Exemples II.13.

1. *avec $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$, donc $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$, on trouve :*

$$\int^x \ln(t)\mathrm{d}t = x\ln(x) - \int^x 1\mathrm{d}t = x\ln(x) - x.$$

2. *avec $u'(x) = \cos(x)$ et $v(x) = x$, donc $u(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = 1$, on trouve :*

$$\int^x t\cos(t)\mathrm{d}t = x\sin(x) - \int^x \sin(t)\mathrm{d}t = x\sin(x) + \cos(x).$$

II.3 Changement de variable

Théorème II.14 (Changement de variable)**.** *Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$, et que f est continue sur $\varphi([a; b])$, alors :*

$$\int_a^b \varphi'(t)\cdot f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Par dérivée d'une composée, si F est une primitive de f, alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $\varphi' \cdot (f \circ \varphi)$. Et ainsi :

$$\int_a^b \varphi'(x)\cdot f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = [F(\varphi(t))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t.$$

□

Remarque II.15. *Ce théorème peut s'utiliser dans les deux sens (comme on va le voir dans les exemples).*

Exemple II.16. *Calculons* $I = \int_0^1 \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x$.

On fait le changement de variable $\varphi(x) = e^x$*, avec* $f : t \mapsto \dfrac{t}{1+t}$*. Alors* φ *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0;1]$*, avec* $\varphi([0;1]) = [1;e]$*, et* f *est continue sur* $[1;e]$*. On déduit :*

$$I = \int_0^1 \varphi'(x) f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = (e-1) - \ln(e+1) + \ln(2).$$

Méthode II.17. *En pratique, on ne fait pas apparaître* φ*. On procède en trois étapes en posant directement* $t = \varphi(x)$ *:*

1. *on dérive* t *en fonction de* x *:* $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\mathrm{d}x$ *;*
2. *on exprime toute l'expression dans l'intégrale en fonction de* t *(et plus* x*) ;*
3. *on change les bornes.*

Pour l'exemple précédent, cela donne avec $t = e^x$ *:*

1. $\mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x$ *;*
2. $\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x = \dfrac{t}{1+t}\mathrm{d}t$ *;*
3. $\int_0^1 \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_1^e \dfrac{t}{1+t}\mathrm{d}t$.

Exemple II.18. *Calculons* $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

On va faire le changement de variable $t = \cos(x)$*. Pour* $x = 0$*, on a* $t = 1$ *et pour* $x = \pi$*, on a* $t = -1$*. La fonction* $\cos$ *est bien* $\mathcal{C}^1$*. Et on a* $\mathrm{d}t = -\sin(x)\mathrm{d}x$*. Et donc :*

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_\pi^0 \sqrt{1-\cos^2(x)}\,(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

en inversant les bornes, et en reconnaissant que $\sqrt{1-\cos^2(x)} = \sin(x)$ *pour* $x \in [0;\pi]$.

Exemple II.19. *Calculons l'intégrale* $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x$.

On pose $x = \ln(t)$*, où la fonction* $\ln$ *est* $\mathcal{C}^1$*. On a* $t = 1$ *pour* $x = 0$ *et* $t = e$ *pour* $x = 1$*. Et* $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$*. Et donc :*

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{e^{2\ln(t)}}{1+e^{\ln(t)}}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^e \frac{t^2}{1+t}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^e \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Exemple II.20. *Pour primitiver, pour* $p, q \in \mathbb{N}$*, la fonction* $t \mapsto \sin^p(t)\cos^q(t)$*, on peut procéder comme suit :*

1. *si* p *et* q *sont impairs : on fait le changement de variable* $u = \cos(2t)$ *;*
2. *si* p *est impair et* q *est pair : on fait le changement de variable* $u = \cos(t)$ *;*
3. *si* q *est pair et* q *est impair, on fait le changement de variable* $u = \sin(t)$.

Si p *et* q *sont pairs, il est plus efficace de linéariser.*

Par exemple, pour calculer une primitive de $t \mapsto \sin^5(t)$*, les règles de Bioche montrent que l'on peut faire le changement de variable* $u = \cos(t)$*, et donc* $\mathrm{d}u = -\sin(t)\mathrm{d}t$*, ce qui donne :*

$$\begin{aligned}
\int^x \sin^5(t)\mathrm{d}t &= -\int^x \underbrace{\sin^4(t)}_{=(1-\cos^2(t))^2} \cdot(-\sin(t))\mathrm{d}t \\
&= -\int^{\cos(x)} (1-u^2)^2\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{5}\cos^5(x) + \frac{2}{3}\cos^3(x) - \cos(x)
\end{aligned}$$

Remarque II.21. *L'exemple précédent s'inscrit dans le cadre plus général des* ***règles de Bioche*** *: pour simplifier le calcul d'une fraction rationnelle* f *en* $\cos$ *et* $\sin$*, si* $f(t)\mathrm{d}t$ *est invariant par le changement* $t \mapsto -t$ *(resp.* $t \mapsto \pi - t$*,* $t \mapsto \pi + t$*), alors on peut faire le changement de variable* $u = \cos(t)$ *(resp.* $u = \sin(t)$*,* $u = \tan(t)$*).*

II.4 Intégrales complexes et fonctions trigonométriques

Proposition II.22. *Si φ est une fonction dérivable de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs complexes, alors* $\exp \circ \varphi$ *est une primitive de $\varphi' \cdot (\exp \circ \varphi)$.*

Corollaire II.23. *Si $\alpha \in \mathbb{C}^*$, alors une primitive de $x \mapsto e^{\alpha x}$ est $x \mapsto \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$.*

Exemple II.24. *Cherchons une primitive de $x \mapsto e^{3x}\sin(4x)$. On a : $e^{3x}\sin(4x) = \mathrm{Im}(e^{3x}e^{4ix}) = \mathrm{Im}(e^{(3+4i)x})$. Mais $x \mapsto \dfrac{1}{3+4i} e^{(3+4i)x}$ est une primitive de $x \mapsto e^{(3+4i)x}$. Donc En prenant la partie imaginaire, on aura une primitive de $x \mapsto e^{3x}\sin(4x)$:*

$$\frac{1}{3+4i} e^{(3+4i)x} = \frac{3-4i}{25} e^{3x} \left(\cos(4x) + i\sin(4x)\right)$$

donc : $x \mapsto \dfrac{e^{3x}}{25} \left(3\sin(4x) - 4\cos(4x)\right)$ est une primitive de $x \mapsto e^{3x}\sin(4x)$.

Exemple II.25. *Cherchons une primitive de $x \mapsto \cos(2\ln(x))$.*
On a : $\cos(2\ln(x)) = \mathrm{Re}(e^{2i\ln(x)})$.
Mais $x \mapsto \frac{1}{2i+1} \cdot e^{(2i+1)\ln(x)}$ est une primitive de $x \mapsto e^{2i\ln(x)}$.
Donc : $x \mapsto \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i+1} \cdot e^{(2i+1)\ln(x)}\right) = \frac{x\cos(2\ln(x))}{5} + \frac{2x\sin(2\ln(x))}{5}$.

Méthode II.26. *Outre les règles de Bioche, on peut chercher à primitiver une puissance de* cos *ou de* sin, *ou un produit de telles puissances, par linéarisation.*

Exemple II.27. *Cherchons une primitive de $x \mapsto \cos^4(x)$.*
Par linéarisation, on a : $\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$.
Donc une primitive est : $x \mapsto \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3x}{8}$.

Remarque II.28. *On voit que la primitive d'une fonction périodique n'est pas nécessairement périodique.*

II.5 Intégrales de fonctions du type $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

Proposition II.29. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a > 0$, et posons $f : x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$, $P = ax^2 + bx + c$ et $\Delta = b^2 - 4ac$:*

1. *si $\Delta > 0$: en notant r_1, r_2 les racines de P, on a $P = a(x - r_1)(x - r_2)$. Ainsi :*

$$f(x) = \frac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{1}{a(r_2 - r_1)} \left(\frac{1}{x-r_2} - \frac{1}{x-r_1}\right)$$

   donc une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{1}{a(r_2-r_1)} \ln\left|\dfrac{x-r_2}{x-r_1}\right|$;

2. *si $\Delta = 0$: en notant r l'unique racine de P, on a $P = a(x - r)^2$. Ainsi :*

$$f(x) = \frac{1}{a} \frac{1}{(x-r)^2}$$

   donc une primitive de f est $x \mapsto -\dfrac{1}{a(x-r)}$;

3. *si $\Delta < 0$: en notant $p = \frac{b}{2a}$ et $q = -\frac{\Delta}{4a}$, on a la forme canonique $P = a(x + p)^2 + q$. Ainsi :*

$$f(x) = \frac{1}{q} \frac{1}{\frac{a}{q}(x+p)^2 + 1}$$

   donc une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{aq}} \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a}{q}}(x+p)\right)$.

Exemple II.30. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$, *avec* $b \neq 0$, *et* $\alpha = a + ib$, *alors pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{(x-a)-ib}{(x-a)^2+b^2} = \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} - i\frac{b}{(x-a)^2+b^2}$$

et donc une primitive sur $\mathbb{R}$ *de* $x \mapsto \dfrac{1}{x-(a+ib)}$ *est :*

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + i\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Chapitre 8

Équations différentielles linéaires

Pour toute la suite, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

I Généralités

Définition I.1. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, une **équation différentielle linéaire d'ordre** n est une équation, dont l'inconnue y est une fonction de I dans $\mathbb{K}$, et de la forme :*

$$(E) \ : \ a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$

*où b et les a_i sont des fonctions définies sur I à valeur dans $\mathbb{K}$, et a_n ne s'annulant pas sur I. Les fonctions a_i s'appellent les **coefficients**.*
*Son **équation homogène associée** est l'équation différentielle obtenue en remplaçant b par la fonction nulle.*

Remarque I.2. *En général, l'intervalle I sur lequel on résout l'équation est donné dans l'énoncé. Sinon, on le cherchera le plus grand possible comme intervalle de $\mathbb{R}$.*

Exemples I.3.

1. *la fonction* $\cos$ *est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $y' = -\sin$, ou des équations différentielles $y'' + y = 0$ et $y^{(4)} - y = 0$;*
2. *la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $xy' + y = 0$.*

Définition I.4. *Un **problème de Cauchy** est un système formé :*
- *d'une équation différentielle (E) d'ordre n ;*
- *des n équations : $y^{(k)}(x_0) = y_k$ (avec $0 \leq k \leq n-1$), pour un $x_0 \in I$ et $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{K}$.*

*La donnée de x_0 et des y_k est appelée **condition initiale**.*

Exemple I.5. *En mécanique classique du point, le principe fondamental de la dynamique fournit une équation différentielle linéaire d'ordre 2 en la position de l'objet étudié. Une condition initiale correspond à la donnée de la position et de la vitesse à un instant donné.*

Proposition I.6. *Si $(E_0) : a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène. Alors l'ensemble $\mathcal{S}_0$ de ses solutions est non vide et stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire que :*

$$\forall f, g \in \mathcal{S}_0, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_0.$$

Démonstration. La fonction nulle est infiniment dérivable, de dérivées successives nulles, et est bien solution du système homogène.
Si $f, g \in \mathcal{S}_0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $h = \lambda f + \mu g$ est n-fois dérivable (par linéarité de la dérivation), avec : $\forall k \in [\![1; n]\!],\ h^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$. Et donc $h \in \mathcal{S}_0$ car :

$$a_n h^{(n)} + \cdots + a_1 h' + a_0 h = \lambda \underbrace{\left(a_n f^{(n)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f\right)}_{=0 \text{ car } f \in \mathcal{S}_0} + \mu \underbrace{\left(a_n g^{(n)} + \cdots + a_1 g' + a_0 g\right)}_{=0 \text{ car } g \in \mathcal{S}_0} = 0.$$

□

Théorème I.7 (Ensemble des solutions)**.** *Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre n. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions, et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.*
Alors, si f est une solution de (E), on a :

$$\mathcal{S} = f + \mathcal{S}_0 = \{f + g \mid g \in \mathcal{S}_0\}.$$

Démonstration. Posons $f \in \mathcal{S}$ et considérons h une fonction n-fois dérivable sur I.
Alors :

$$\begin{array}{rcl} h \in \mathcal{S} & \Leftrightarrow & a_n h^{(n)} + \cdots + a_1 h' + a_0 h = b = a_n f^{(n)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f \\ & \Leftrightarrow & a_n (h-f)^{(n)} + \cdots + a_1 (h-f)' + a_0 (h-f) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (h - f) \in \mathcal{S}_0 \end{array}.$$

□

Remarque I.8. *Cet énoncé ne dit pas qu'il existe des solutions. Il dit en revanche que, si on sait résoudre l'équation homogène et que l'on possède **une** solution à l'équation, alors on a toutes les solutions.*

Proposition I.9 (Principe de superposition)**.** *Soient b_1, b_2 deux fonctions définies sur I, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, et $b = \lambda b_1 + \mu b_2$. On considère les équations différentielles*

$$\begin{array}{rll} (E) & : a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y & = b \\ (E_1) & : a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y & = b_1 \\ (E_2) & : a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y & = b_2 \end{array}$$

Si f est une solution de (E_1) et g est une solution de (E_2), alors $\lambda f + \mu g$ est une solution de (E).

II Équations différentielles linéaires du premier ordre

On considère ici l'équation différentielle : $(E) : y' + ay = b$, définie sur un intervalle I, où a, b sont deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On note $(E_0) : y' + ay = 0$ l'équation homogène associée.

II.1 Solutions de l'équation homogène

Proposition II.1. *Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, où A est une primitive de a sur I.*

Démonstration. Montrons déjà que les fonction $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, sont bien solutions de (E_0). Par dérivation de l'exponentielle complexe, on a que f_λ est dérivable sur I, avec : $\forall x \in I,\ f_\lambda'(x) = -a(x)e^{-A(x)}$. Et ainsi :

$$\forall x \in I,\ f_\lambda'(x) + a(x) f_\lambda(x) = -a(x)e^{-A(x)} + a(x)e^{-A(x)} = 0.$$

Réciproquement, si f est une solution de (E_0), qui vérifie donc : $f' + af = 0$. Posons : $g : x \mapsto f(x)e^{A(x)}$. Alors g est dérivable sur I, avec : $\forall x \in I,\ g'(x) = f'(x)e^{A(x)} + f(x)a(x)e^{A(x)} = 0$. Donc g est constante sur I : en posant $\lambda \in K$ comme étant l'unique valeur prise par g, on trouve bien que : $f : x \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ est de la forme voulue. □

Remarque II.2. *On peut retrouver partiellement ce résultat : si une solution f de (E_0) ne s'annule pas, elle vérifie que $\frac{f'}{f} = -a(x)$, donc : $(\ln(|f|))' = -a(x)$. En primitivant, puis en prenant l'exponentielle, on retrouve que $f = e^{-A(x)+C} = \lambda e^{-A(x)}$, avec $\lambda = e^C$ une constante.*

Corollaire II.3 (Équation à coefficients constants)**.** *Si $a \in \mathbb{C}$, les solutions de l'équation homogène (E_a) : $y' + ay = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-ax}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Exemples II.4.

1. *si $a(x) = x$: alors $A(x) = \frac{x^2}{2}$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$;*
2. *si $a(x) = -\frac{1}{x}$: alors $A(x) = -\ln(|x|)$ donc les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{\ln(|x|)} = \lambda |x|$. Mais, quitte à changer λ en son opposé, on déduit que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont de la forme $x \mapsto \lambda x$.*

Remarque II.5. *Dans le deuxième exemple, on peut recoller les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ pour obtenir des solutions qui sont des restrictions de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ entier. Mais ce n'est pas toujours le cas.*

II.2 Solutions de l'équation complète

Méthode II.6 (Méthode de variation de la constante)**.** *Pour trouver une solution de (E), on peut la chercher sous la forme $f(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, où λ est une fonction dérivable.*
On obtient alors que f est solution de (E) si, et seulement si, λ est une primitive de la fonction $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$.

Démonstration. La fonction f est bien dérivable, de dérivée : $f' = \lambda' e^{-A} - \lambda a e^{-A}$. Et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} f \in \mathcal{S} & \Leftrightarrow & f' + af = \lambda' e^{-A} - \lambda a e^{-A} + a\lambda e^{-A} = b \\ & \Leftrightarrow & \lambda' \cdot e^{-A} = b \\ & \Leftrightarrow & \lambda' = be^A \end{array}.$$

□

Remarques II.7.

1. *Pour simplifier la recherche d'une solution, on pourra décomposer b en sommes de fonctions plus simples, et utiliser le principe de superposition.*
2. *On retrouve toutes les solutions de l'équation : déjà parce que la fonction e^{-A} ne s'annule jamais, donc toute fonction (solution ou pas) s'écrit sous la forme λe^{-A} (en posant $\lambda = fe^a$) ; et ensuite car on trouve λ comme primitive d'une fonction, donc on la connaît à une constante près, donc les solutions diffèrent bien d'une fonction de la forme ce^{-A} (pour c constante), c'est-à-dire d'une solution de l'équation homogène.*
3. *On n'oublie pas de revenir à f : ce n'est pas λ qui est solution, mais bien λe^{-A}.*

Exemples II.8.

1. *On considère l'équation (E) : $y' + xy = x$ sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$.*

   Prenons donc λ dérivable sur $\mathbb{R}$ et posons $f : x \mapsto \lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Alors :

   $$f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \lambda'(x) = \left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'$$

   donc : $f : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$ est une solution de (E).

   Et finalement : $\mathcal{S} = \{x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

2. *On considère l'équation* $(E) : y' - \frac{1}{x}y = x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Les solutions de l'équation homogène sont les* $x \mapsto \lambda x$, *pour* $\lambda \in \mathbb{K}$.

   Prenons donc λ *dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et posons* $f : x \mapsto \lambda(x) \cdot x$. *Alors :*

   $$f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{x}{x} = 1 = (x)'$$

   donc : $f : x \mapsto x^2$ *est une solution de* (E).

   Et finalement : $\mathcal{S} = \{x \mapsto x^2 + \lambda x \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Proposition II.9 (Formulation intégrale)**.** *Si on fixe* $x_0 \in I$, *l'ensemble des solutions de* (E) *est :*

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto e^{-A(x)} \left(\lambda + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t)} \mathrm{d}t \right) | \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

II.3 Problèmes de Cauchy et recollement de solutions

Théorème II.10 (Théorème de Cauchy–Lipschitz)**.** *Si* $x_0 \in I$ *et* $y_0 \in \mathbb{K}$, *alors il existe une unique solution au problème de Cauchy :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' + ay & = & b \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right. .$$

Démonstration. Toute solution de (E) est de la forme $f : x \mapsto e^{-A(x)} \left(\lambda + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t)} \right)$, pour un $\lambda \in \mathbb{K}$.
Et donc pour un tel f on a : $f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow \lambda = y_0 e^{A(x_0)}$.
Ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution au problème de Cauchy. □

Remarque II.11. *Le fait que* a *et* b *soient continues est essentiel : on peut perdre aussi bien l'existence que l'unicité sinon.*

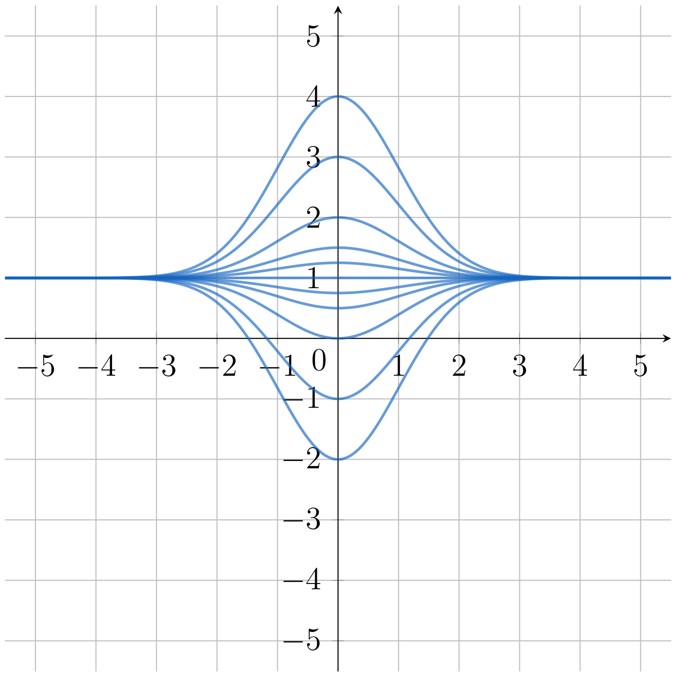
Corollaire II.12. *Si* f, g *sont deux solutions de* (E), *alors : soit* $f = g$, *soit leurs courbes ne se croisent jamais. C'est-à-dire que :*

$$\forall f, g \in \mathcal{S},\ (\forall x \in I,\ f(x) = g(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in I,\ f(x) = g(x)).$$

Démonstration. S'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$, alors f et g sont solutions du même problème de Cauchy (associé aux conditions initiales x_0 et $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$), donc $f = g$. □

Remarque II.13. *Graphiquement, cela veut dire que les courbes des solutions de l'équation découpent le plan : chaque point du plan appartient à la courbe d'une et une seule solution de* S.

Exemple II.14. *Si on reprend l'équation* $y' + xy = x$, *ses solutions donnent le découpage suivant du plan :*



Méthode II.15. *Pour résoudre une équation différentielle de la forme $ay' + by = x$, on identifie d'abord les points en lesquels a s'annule. Hors de ces points, on peut se ramener à une équation du type $y' + ay = b$, que l'on sait résoudre. Et il suffit de voir si l'on peut recoller des solutions : ajuster les paramètres pour que les solutions soient prolongeable par continuité en les points d'annulation de a, et que ces prolongements soient eux-même dérivables.*

Exemple II.16. *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire $(E) : x^2y' - y = x^2 - x + 1$.*
En divisant par x^2 l'équation, on se ramène à étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ l'équation : $y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{x^2-x+1}{x^2}$

— *équation homogène : sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$, une primitive de $-\frac{1}{x^2}$ est $\frac{1}{x}$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme :*

$$x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{x}},\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

— *solution particulière : On va directement raisonner par identification, en cherchant une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ax + b$. On a pour une telle fonction f :*

$$f'(x) - \frac{1}{x^2}f(x) = a - \frac{ax+b}{x^2} = \frac{ax^2 - ax - b}{x^2}$$

donc $f : x \mapsto x - 1$ est une solution particulière de (E) (aussi bien sur $\mathbb{R}_+^*$ que sur $\mathbb{R}_-^*$).

— *ensembles solution : les ensembles de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont donc donnés respectivement par les ensembles :*

$$\mathcal{S}_+ = \{x \mapsto x - 1 + \lambda e^{-1/x} \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \text{ et } \mathcal{S}_- = \{x \mapsto x - 1 + \mu e^{-1/x} \mid \mu \in \mathbb{K}\}$$

— *recollement continu : comme $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-1/x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$ (par limite d'une composée), alors le seul moyen d'avoir une solution continue en 0 en recollant des éléments de $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$ est de prendre $\mu = 0$. Donc les solutions possibles de (E) sont les fonctions de la forme :*

$$x \mapsto \begin{cases} x - 1 + \lambda e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases},\quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{K}.$$

— *dérivabilité du recollement : soit f une solution continue obtenue par recollement. Alors :*

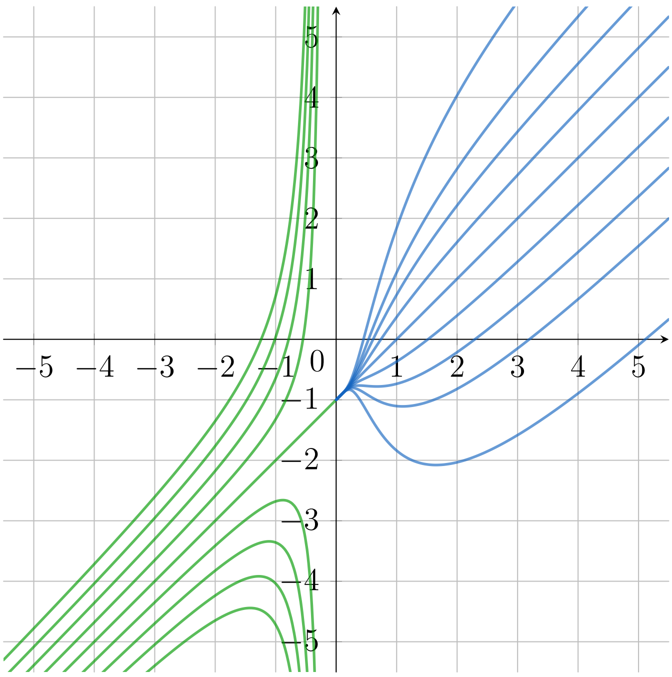
— *si $x < 0$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 1$;*

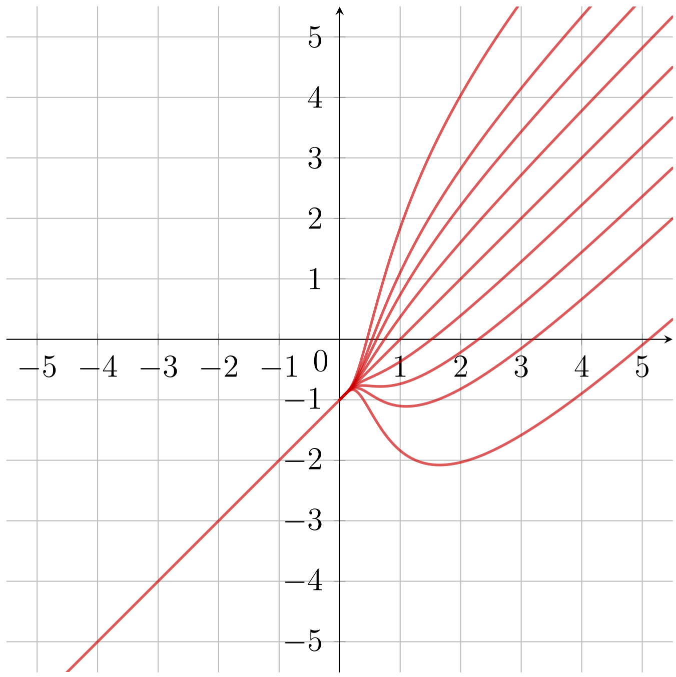
— *si* $x > 0$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1 + \dfrac{\lambda e^{-1/x}}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$ *où on utilise que* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} -\left(\frac{-1}{x}\right) e^{-1/x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) \cdot e^{x} = 0$ *par croissances comparées.*

donc une telle fonction est bien dérivable.

Conclusion : *les solutions de* (E) *sont exactement les fonctions :*

$$x \mapsto \begin{cases} x - 1 + \lambda e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$





Ainsi, le problème de Cauchy associé à (E) *avec condition initiale* $y(x_0) = y_0$ *admet :*

- *une unique solution si* $x_0 > 0$ *et* $y_0 \in \mathbb{K}$ *(quelconque) ;*
- *une infinité de solutions si* $x_0 \leq 0$ *et* $y_0 = x_0 - 1$ *;*
- *aucune solution si* $x_0 \leq 0$ *et* $y_0 \neq x_0 - 1$.

Remarque II.17. *Dans l'exemple précédent, la variation de la constante était plus compliquée pour trouver une solution particulière : elle demandait de résoudre* $\lambda'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$. *On procède par principe de superposition, en reconnaissant que :*

- *la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ *est la dérivée exacte de* $x \mapsto -e^{\frac{1}{x}}$ *;*
- *la fonction* $x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$ *est la dérivée exacte de* $x \mapsto x e^{\frac{1}{x}}$.

Et on retrouve bien que $x \mapsto (x-1) e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} = x - 1$ *est solution particulière de* (E) *(sur* $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ *ou même* $\mathbb{R}$*).*

III Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On considère ici l'équation différentielle : $(E) : y'' + ay' + by = c$, définie sur un intervalle I, où a, b sont des constantes dans $\mathbb{K}$, et c est une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On note $(E_0) : y'' + ay' + by = 0$ l'équation homogène associée.

Définition III.1. *Le polynôme* $X^2 + aX + b$ *est appelé le* ***polynôme caractéristique*** *de l'équation* (E).

III.1 Solutions de l'équation homogène

Proposition III.2. *Notons $\Delta = a^2 - 4b$. Alors :*

1. *si $\Delta \neq 0$: notons r_1, r_2 les deux racines distinctes du polynôme caractéristique de (E). Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (ou leurs parties réelles si on raisonne sur $\mathbb{R}$) ;*
2. *si $\Delta = 0$: notons r l'unique racine du polynôme caractéristique de (E). Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (ou leurs parties réelles si on raisonne sur $\mathbb{R}$).*

Démonstration. Notons r_1, r_2 les racines du polynôme caractéristique (avec éventuellement $r_1 = r_2 = r$). Soit f deux fois dérivable sur I. Posons $g = f' - r_2 f$. Alors g est dérivable, avec $g' = f'' - r_2 f'$. Comme $r_1 + r_2 = -a$ et que $r_1 r_2 = b$, on déduit que :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{S}_0 &\Leftrightarrow f'' = -af' - bf \\ &\Leftrightarrow g' = -ag' - bg - r_2 g' \\ &\Leftrightarrow g' = r_1 f' - r_1 r_2 f = r_1 g \end{aligned}$$

donc z est solution de (E_0) si, et seulement si, g est de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$.
Ainsi, f est solution de (E_0) si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que f soit solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$(E') : y' - r_2 y = \lambda e^{r_1 x}$$

dont les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto \mu e^{r_2 x}$, pour $\mu \in \mathbb{K}$.
Reste à trouver une solution particulière, ce que l'on fait par variation de la constante en cherchant une solution sous la forme $x \mapsto \mu(x)e^{r_2 x}$: c'est une solution si, et seulement si, μ est une primitive de $x \mapsto \lambda e^{(r_1 - r_2)x}$.

1. si $\Delta \neq 0$: alors $r_1 \neq r_2$, donc $\mu : x \mapsto \lambda \dfrac{e^{(r_1 - r_2)x}}{r_1 - r_2}$ convient. Donc :
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \frac{\lambda}{r_1 - r_2} e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}.$$
2. si $\Delta = 0$: alors $r_1 = r_2 = r$, donc $\mu : x \mapsto \lambda x$ convient. Donc :
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}\}.$$

□

Exemples III.3.

1. *Les solutions de l'équation $y'' - y' - 2y = 0$ sont les $x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;*
2. *Les solutions de l'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$ sont les $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.*

Corollaire III.4. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors avec les mêmes notations :*

1. *si $\Delta > 0$: alors $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles de (E_0) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;*
2. *si $\Delta = 0$: alors $r \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles de (E_0) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;*
3. *si $\Delta < 0$: alors $r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles de (E_0) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Si f est une solution réelle, alors f est une solution complexe telle que $\mathrm{Re}(f) = f$.
Ainsi les cas où $\Delta \geq 0$ se proviennent directement de l'étude de $\mathbb{C}$ (et le fait que $f = \mathrm{Re}(f)$ imposent que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
Supposons $\Delta < 0$. Comme $a, b \in \mathbb{R}$, alors $r_1 = \overline{r_2} = \alpha + i\beta$. Si f est une solution réelle, elle est de la forme $f : x \mapsto \lambda_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + \mu_1 e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left((\lambda_1+\mu_1)\cos(\beta x) + i(\lambda_1-\mu_1)\sin(\beta x)\right)$.
Et ainsi pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \mathrm{Re}(f(x)) = e^{\alpha x}\left(\underbrace{\mathrm{Re}(\lambda_1+\mu_1)}_{=\lambda}\cos(\beta x) + \underbrace{\mathrm{Re}(i(\lambda_1-\mu_1))}_{=\mu}\sin(\beta x)\right).$$

Et il est clair que les fonctions de cette forme sont bien des solutions. □

Remarques III.5.

1. *Dans le dernier cas, avec les mêmes notations, les solutions sont aussi les fonctions de la forme :* $x \mapsto Ae^{\alpha x}\cos(\beta x + \varphi)$, *pour* $A \in \mathbb{R}_+$ *et* $\varphi \in]-\pi;\pi]$, *suivant un résultat de trigonométrie. On dit alors que* A *est l'amplitude,* φ *le déphasage,* α *le coefficient d'amortissement, et* β *la fréquence. Cette notation est fréquente lorsque l'on travaille avec des circuits électriques.*
2. *De manière cachée, la dernière égalité nécessite que* $\overline{\lambda_1} = \mu_1$ *: c'est un résultat que l'on peut retrouver par le théorème de Cauchy–Lipschitz qui assure l'unicité de l'écriture des solutions, et du fait que, pour* f *réelle,* $\overline{f} = f$ *fournit une autre écriture qui revient à changer* λ_1 *en* $\overline{\mu_1}$ *et* μ_1 *en* $\overline{\lambda_1}$.

Exemple III.6. *Si* $\omega \in \mathbb{R}^*$, *les solutions réelles de l'équation différentielle* $y'' + \omega^2 y = 0$ *sont les fonctions de la forme :*

$$x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x),\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

III.2 Solutions de l'équation complète

Proposition III.7. *Si* $c : x \mapsto Ae^{\lambda x}$, *pour* $A, \lambda \in \mathbb{K}$, *alors il existe une solution particulière de* (E) *de la forme :*

1. $x \mapsto \mu e^{\lambda x}$, *avec* $\mu \in \mathbb{K}$, *si* λ ***n'est pas une racine*** *du polynôme caractéristique ;*
2. $x \mapsto \mu x e^{\lambda x}$, *avec* $\mu \in \mathbb{K}$, *si* λ *est* ***racine simple*** *du polynôme caractéristique ;*
3. $x \mapsto \mu x^2 e^{\lambda x}$, *avec* $\mu \in \mathbb{K}$, *si* λ *est* ***racine double*** *du polynôme caractéristique.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. On pose $f : x \mapsto \mu x^k e^{\lambda x}$. Alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mu e^{\lambda x}\left(\lambda x^k + kx^{k-1}\right) \text{ et } f''(x) = \mu e^{\lambda x}\left(\lambda^2 x + 2\lambda k x^{k-1} + k(k-1)x^{k-2}\right).$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = \mu e^{\lambda x}\left((\lambda^2 + a\lambda + b)x^k + (2\lambda + a)kx^{k-1} + k(k-1)x^{k-2}\right)$$

Donc f est une solution si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mu\left((\lambda^2 + a\lambda + b)x^k + (2\lambda + a)kx^{k-1} + k(k-1)x^{k-2}\right) = A.$$

1. si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique : alors $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$, donc $k = 0$ et $\mu = \dfrac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}$ conviennent ;
2. si λ est racine simple du polynôme caractéristique : alors $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ mais $2\lambda + a \neq 0$, donc $k = 1$ et $\mu = \dfrac{A}{2\lambda + a}$ conviennent ;

3. si λ est racine double du polynôme caractéristique : alors $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ et $2\lambda + a = 0$, donc $k = 2$ et $\mu = \dfrac{A}{2}$ conviennent.

□

Remarque III.8. *Le passage de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ permet de trouver par la même méthodes des solutions réelles lorsque c est de la forme $Be^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ou $Be^{\alpha x}\sin(\beta x)$ en raisonnant dans les complexes puis en prenant les parties réelles ou imaginaire.*

Exemple III.9. *Considérons l'équation $(E) : y'' - y' - 2y = e^{-x}$.*
Le polynôme caractéristique est $X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$, donc -1 est racine simple du polynôme caractéristique, et il existe une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda x e^{-x}$. Posons $f : x \mapsto \lambda x e^{-x}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lambda(1-x)e^{-x} \text{ et } f''(x) = \lambda(x-2)e^{-x}.$$

Donc : $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = \lambda e^{-x} \cdot [(x-2) - (1-x) - 2x] = -3\lambda e^{-x}$.
Donc : $f : x \mapsto -\frac{1}{3} x e^{-x}$ est une solution de (E).
Donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \left(\lambda - \frac{1}{3}x\right) e^{-x} + \mu e^{2x}.$$

Exemple III.10. *Considérons l'équation $(E) : y'' + 2y' + 2y = -2e^{-x}\cos(x)$, dont on cherche les solutions réelles.*
On lui associe l'équation : $(E') : y'' + 2y' + 2y = -2e^{-x}e^{ix} = -2e^{(-1+i)x}$.
Le polynôme caractéristique est $X^2 + 2X + 2 = (X - (-1+i))(X - (-1-i))$, donc $(-1+i)$ est racine simple du polynôme caractéristique, et il existe une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda x e^{(-1+i)x}$. Posons $f : x \mapsto \lambda x e^{(-1+i)x}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lambda(1 + (-1+i)x)e^{(-1+i)x} \text{ et } f''(x) = \lambda(-2 + 2i - 2ix)e^{(-1+i)x}.$$

Donc : $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = \lambda e^{(-1+i)x} \cdot [(-2 + 2i - 2ix) + 2(1 + (-1+i)x) + 2x] = 2i\lambda e^{(-1+i)x}$.
Donc : $f : x \mapsto ixe^{(-1+i)x}$ est une solution de (E').
Donc $y : x \mapsto \mathrm{Re}(f(x)) = -xe^{-x}\sin(x)$ est une solution de (E).
Donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto e^{-x}\left(\lambda e^{ix} + \mu e^{-x} - x\sin(x)\right) = e^{-x}\left[(\lambda+\mu)\cos(x) + (i\lambda - i\mu - x)\sin(x)\right],\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

et les solutions à valeurs réelles sont les :

$$x \mapsto e^{-x}\left[\lambda'\cos(x) + (\mu' - x)\sin(x)\right],\ \lambda', \mu' \in \mathbb{R}.$$

Remarque III.11. *Au lieu de passer par les parties réelles, on pouvait aussi utiliser le principe de superposition, en constatant que : $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et donc $-2e^{-x}\cos(x) = -e^{(-1+i)x} - e^{(-1-i)x}$. L'équation homogène (donc ses solutions) est la même que ci-dessus. Pour trouver une solution particulière :*

- *avec second membre de la forme $-e^{(-1+i)x}$: on retombe sur la situation de l'exemple, et on cherche une solution de la forme $f : x \mapsto \lambda x e^{(-1+i)x}$. On trouve $\lambda = \dfrac{i}{2}$;*
- *avec second membre de la forme $-e^{(-1-i)x}$: en faisant des calculs similaires (ou en passant au conjugué complexe), on trouve que la fonction $x \mapsto \lambda x e^{(-1-i)x}$ est solution pour $\lambda = \dfrac{-i}{2}$.*

Et finalement, on trouve comme solution particulière la somme des deux (par principe de superposition), à savoir :

$$x \mapsto \frac{i}{2}xe^{(-1+i)x} - \frac{i}{2}xe^{(-1-i)x} = -xe^{-x}\sin(x).$$

On trouve ensuite le même ensemble solution que précédemment.

Remarque III.12. *En général, on précisera sous quelle forme chercher une solution particulière. Notons que, plus généralement, si le second membre est de la forme $Q(x)e^{\lambda x}$, on peut trouver une solution de la forme $x^m R(x)e^{\lambda x}$ où m est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique et R est un polynôme de même degré que Q.*

III.3 Problèmes de Cauchy

Théorème III.13 (Théorème de Cauchy–Lipschitz)**.** *Si $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, alors il existe une unique solution au problème de Cauchy :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + ay' + by & = & c \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \end{array}\right. .$$

Idée de preuve. On admet que l'équation différentielle (E) possède une solution, que l'on note f. Alors :

1. si $\Delta \neq 0$: les solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} + f(x)$. Donc on souhaite résoudre le système d'inconnues λ, μ suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} e^{r_1 x_0}\lambda & + & e^{r_2 x_0}\mu & = & y_0 - f(x_0) \\ r_1 e^{r_1 x_0}\lambda & + & r_2 e^{r_2 x_0}\mu & = & y_1 - f'(x_0) \end{array}\right.$$

qui est un système de linéaire à 2 inconnues, et 2 équations. Son déterminant est : $(r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x_0} \neq 0$, donc ce système admet une unique solution.

2. si $\Delta = 0$: on procède de même, et on est amené à chercher les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_0 e^{r x_0}\lambda & + & e^{r x_0}\mu & = & y_0 - f(x_0) \\ (1 + r x_0)e^{r x_0}\lambda & + & r e^{r x_0}\mu & = & y_1 - f'(x_0) \end{array}\right.$$

qui est de déterminant $-e^{2r x_0} \neq 0$, et admet donc aussi une unique solution.

Dans les deux cas, il n'y a donc qu'une seule solution au problème de Cauchy. □

Remarque III.14. *Comme pour le degré 1, on peut montrer l'existence de solution par une méthode de variation de la constante, mais celle-ci est plus complexe pour le degré 2.*
Si c est de l'une des formes du paragraphe précédent (ou une fonction constante), on sait trouver des solutions donc la démonstration est complète.

Chapitre 9

Comparaisons de fonctions et de suites

Pour tout ce chapitre, on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{I}$ ou éventuellement $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I n'est pas majoré (resp. pas minoré).

I Relations de comparaisons

I.1 Négligeabilité

Définition I.1. *Soient f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur I, sauf éventuellement en a. On dit alors que f est* ***négligeable devant*** g ***au voisinage de*** a*, ce que l'on note $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, si :*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Remarques I.2.

1. *Le fait que g ne s'annule pas n'est pas une véritable contrainte, et quasiment toutes les situations que l'on étudiera s'y ramène, quitte à réduire l'intervalle I.*
2. *Il existe une définition plus générale, mais plus difficile à manipuler, qui consiste à dire qu'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V_a de a, qui tend vers 0 en a, telle que : pour tout $x \in I \cap V_a,\ f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.*

Exemple I.3. *Considérons $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3$. Alors :*

1. *au voisinage de 0 : $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{x^3}{x^2} = x \underset{x\to 0}{\to} 0$, donc $g(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(f(x))$;*
2. *au voisinage de $\pm\infty$: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$, donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $f(x) \underset{x\to-\infty}{=} \mathrm{o}(g(x))$;*
3. *au voisinage de $a \in \mathbb{R}^*$: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x} \underset{x\to a}{\to} \dfrac{1}{a} \neq 0$ et $\dfrac{g(x)}{f(x)} = x \underset{x\to a}{\to} a \neq 0$, donc on ni f n'est négligeable devant g, ni g n'est négligeable devant f au voisinage de a.*

Remarques I.4.

1. *La négligeabilité est une notion locale : elle dépend de là où on se place. Et, même avec les mêmes fonctions, changer le lieu d'étude change la négligeabilité ou non.*
2. *La négligeabilité n'est pas omniprésente : il y a des fonctions qui ne sont pas comparables au sens de la négligeabilité.*
3. *Moralement, dire que f est négligeable devant g veut dire qu'elle est* ***infiniment*** *plus petite. Concrètement, cela se traduit en terme de vitesse de convergence :*

— *si f tend vers l'infini, alors g également, et le fait infiniment plus vite ;*
— *si g tend vers 0, alors f également, et le fait infiniment plus vite.*

Exemple I.5. *On a vu, dans les croissances comparées, que :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

c'est-à-dire que : $x \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(e^x)$ *et* $\ln(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)$.
Par produit, il vient :

$$\frac{\ln(x)}{e^x} = \frac{\ln(x)}{x}\frac{x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

et donc : $\ln(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(e^x)$.

Remarque I.6. *Il faudra prendre garde aux notations "$\underset{x\to a}{=} \mathrm{o}$" qui ne vont pas dans les deux sens : dans le cas précédent, on a* $x \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(e^x)$ *et* $\ln(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(e^x)$, *mais on n'a évidemment pas* $x = \ln(x)$ *ou* $x \underset{x\to+\infty}{=} \ln(x)$.

I.2 Équivalence

Définition I.7. *Soient f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur I, sauf éventuellement en a. On dit alors que f est* ***équivalente à*** *g* ***au voisinage de*** *a, ce que l'on note* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, *si :*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Remarques I.8.

1. *Là encore, si g s'annule, on cherchera à réduire l'intervalle I. Mais, comme le quotient $\dfrac{f}{g}$ tend vers $1 \neq 0$, on peut s'intéresser à la non-annulation de f plutôt que celle de g, ce qui revient au même.*
2. *Plus généralement, cela revient à dire qu'il existe une fonction θ définie sur un voisinage V_a de a, qui tend vers 1 en a, telle que : pour tout $x \in I \cap V_a$, $f(x) = \theta(x)g(x)$.*

Exemples I.9.

1. *Au voisinage de 0, on a vu que :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, *et donc :* $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
   On a aussi vu que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, *et donc* $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, *qu'on pourra aussi écrire* $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} 1-x$.
2. *Au voisinage de 0, on a que :* $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$, *et donc :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1$, *donc* $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
   On a également : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, *alors* $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
3. *Au voisinage de $+\infty$, on a :*

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2} = \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{1} = 1$$

   et donc : $x^2+x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2-3x+2$.
   La même méthode montre que l'on a même les équivalents plus simples : $x^2+x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.

Remarques I.10.

1. *Comme pour la négligeabilité : c'est une notion locale (elle dépend de là où on se place), et elle n'est pas omniprésente (il y a des fonctions qui ne sont pas comparables au sens de l'équivalence).*
2. *Moralement, dire que f équivalente à g veut dire qu'elle est* ***du même ordre de grandeur****. Deux fonctions équivalentes, si elles tendent vers 0 ou l'infini, tendent à la même vitesse.*

Proposition I.11. *La relation "être équivalent au voisinage de a" est :*

1. ***réflexive*** *: on a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$;*
2. ***symétrique*** *: si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$;*
3. ***transitive*** *: si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.*

Démonstration.

1. $\dfrac{f(x)}{f(x)} = 1 \underset{x\to a}{\to} 1$
2. si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 1$, alors $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \underset{x\to a}{\to} \dfrac{1}{1} = 1$
3. par limite d'un produit : $\dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\to} 1 \cdot 1 = 1$

□

Remarque I.12. *Cela veut dire qu'on à affaire à une* ***relation d'équivalence*** *: c'est un lien entre deux objets qui se comporte sensiblement comme une égalité.*
On verra en revanche qu'un équivalent est moins permissif qu'une égalité, ce qui légitime l'intérêt du résultat suivant.

Proposition I.13. *Si f, g sont définies sur I, on a l'équivalence :*

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}(g(x)) \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}(f(x)).$$

Démonstration. Comme la relation d'équivalence est symétrique, le premier point équivaut à $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 = \lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
Le reste vient du fait que $\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1$, et donc :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}(g(x))$$

et pareil pour la dernière comme : $\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)} = 1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}$. □

Exemple I.14. *On a vu que $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x)$, donc : $x + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.*
Et on a par le même raisonnement que : $e^x + x \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$.

Remarque I.15. *Cette égalité est fondamentale. On verra que, selon le contexte, il peut être plus agréable de travailler avec des équivalents ou avec des o, et cette relation permet de passer de l'un à l'autre.*

I.3 Domination

Définition I.16. *Soient f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule aps sur I, sauf éventuellement en a. On dit que f est* **dominée par** *g* **au voisinage de** *a, ce que l'on note $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$, si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée sur un voisinage de a, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V_a de a et un réel $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$\forall x \in I \cap V_a,\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$$

ou autrement dit s'il existe $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in I,\ |x-a| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M.$$

Remarques I.17.

1. *Plus généralement, cela revient à dire qu'il existe un voisinage V_a de a, et :*
   — *une fonction M bornée sur V_a, telle que : pour tout $x \in I \cap V_a$, $f(x) = M(x)g(x)$;*
   — *ou un réel M tel que : pour tout $x \in I \cap V_a$, $|f(x)| \leq M \cdot |g(x)|$.*
2. *Cela veut dire que f n'est au pire pas beaucoup plus grand que g : f peut être plus petite que g, même infiniment plus petite, et pourrait être plus grande que g, mais pas infiniment plus grande.*

Proposition I.18. *Si f, g sont définies sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :*

$$\Big(f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)) \text{ ou } f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda g(x)\Big) \Rightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x)).$$

Démonstration. Dans les deux premiers cas, le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers une limite finie (0 ou λ selon les cas). Le résultat se déduit qu'une fonction ayant une limite finie est bornée. □

Remarques I.19.

1. *Les notions de o ou de $\sim$ sont donc plus fortes que celle de O dans le sens où le O englobe les deux autres notions.*
2. *La réciproque est fausse : il existe des fonctions dominées qui ne sont ni négligeables ni des équivalents. Mais l'idée est que ces deux cas extrêmes couvrent déjà beaucoup de situations, ce qui fait qu'on ne travaillera pas beaucoup avec des O.*
3. *Il est plus rare d'utiliser les O, mais c'est souvent plus pratique. par exemple quand on travaille avec des fonctions bornées mais qui n'ont pas de limites : $\cos, \sin, x \mapsto x - \lfloor x \rfloor, \dots$*

Exemples I.20.

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|\cos(x)| \leq 1$ et $|\sin(x)| \leq 1$, et donc peu importe la valeur de a :*
$$\cos(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(1) \text{ et } \sin(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(1).$$
2. *Par définition, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Et donc pour tout $x > 0$: $0 \leq \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$, donc pour tout $a > 0$ ou $a = +\infty$: $\lfloor x \rfloor \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(x)$.*

Remarque I.21. *Pour le second point, on a même l'équivalent : $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, comme pour tout $x > 1$: $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ et donc en divisant par x : $\dfrac{x-1}{x} < \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$ ce qui assure que $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ car le quotient tend vers 1 par encadrement.*

II Manipulations des relations de comparaisons

II.1 Opérations usuelles sur les relations de comparaisons

Proposition II.1 (Opérations sur les o et les O)**.** *Soient f, g, h des fonctions définies sur I. Alors :*

1. *si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(\lambda g(x))$ et $\lambda f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$;*
2. *si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$, alors $f(x)+g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$;*
3. *si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$ (transitivité) ;*
4. *si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g_2(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g_1(x)g_2(x))$;*
5. *si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)) \Leftrightarrow f(x)^\alpha \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)^\alpha)$;*
6. *si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)h(x))$;*
7. *si f et g ne s'annulent pas, alors : $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)) \Leftrightarrow \dfrac{1}{g(x)} \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$;*
8. *$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)) \Leftrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(|g(x)|)$.*

Démonstration.

1. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\lambda g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\lambda f(x)}{g(x)} = 0$
2. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{h(x)} = 0+0=0$
3. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\to} 0\cdot 0 = 0$
4. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 0 = \lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{g_2(x)} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} = 0\cdot 0 = 0$
5. par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto x^\alpha$: $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow \frac{f(x)^\alpha}{g(x)^\alpha} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha \underset{x\to a}{\to} 0$. La réciproque se déduit en appliquant le résultat avec $1/\alpha > 0$.

Et les autres se traitent de même. □

Remarques II.2.

1. *Tous les résultats ci-dessus restent valables en changeant les* o *en des* O*. Mais en pratique on utilisera surtout des* o *(qui sont plus précis, même s'ils conduisent parfois à des calculs un peu plus lourds).*

   Dans cette optique d'alléger les calculs, on essaiera le plus possible de regrouper les termes dans les o *: aussi bien les différents* o *qui interviennent, que certains termes qui seraient en dehors.*
2. *On prend bien garde à sommer* ***les*** o *et pas* ***dans les*** o*. Par exemple, on a* $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x)$ *et* $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(-x)$*. Mais* $2\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\neq} \mathrm{o}(x-x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(0)$.

   De fait, pour sommer des o *différents, il faudra d'abord les exprimer comme des* o *d'une même quantité.*

Exemple II.3. *Avec $a=+\infty$:*
— $\mathrm{o}(x^2)+\mathrm{o}(\ln(x))+\mathrm{o}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^2)$;
— $\mathrm{o}(x^2)-\mathrm{o}(x^2) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^2)$;

— $x + x^2 + \mathrm{o}(x^2) \underset{x\to+\infty}{=} x^2 + \mathrm{o}(x^2)$;
— $x^2 + x^2\ln(x) + \mathrm{o}(x)$ *en revanche ne se simplifie pas ;*

Proposition II.4 (Opérations sur les équivalents)**.** *Soient f, g, h des fonctions définies sur I. Alors :*
1. *si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x)$;*
2. *si $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x)^n \underset{x\to a}{\sim} g(x)^n$;*
3. *si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)h(x)$;*
4. *si f ou g ne s'annule pas, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$;*
5. *si f ou g est positive, et $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$.*

Démonstration. Comme pour les o, en regardant les quotients. La différence est dans le points *5* : on peut prendre $\alpha \in \mathbb{R}$, car même si $\alpha \leq 0$ la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue en 1 ; mais on perd l'équivalence avec le cas $\alpha = 0$. □

Remarques II.5.
1. *On voit que les équivalents se comportent très bien avec les produits, quotients et puissances.*
2. *En revanche, on ne somme* ***jamais*** *des équivalents : pour avoir un équivalent d'une somme, on est obligé de repasser par les* o*.*
   Par exemple : $x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ *et* $-x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$*, mais* $x + 1 - x + 1 = 2 \underset{x\to+\infty}{\not\sim} 0 = x - x$*.*

Proposition II.6. *Si f, g, h sont définies sur I, avec g, h ne s'annulant pas sauf éventuellement en a. Alors :*
1. *si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$;*
2. *si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$.*

Démonstration. Dans un cas comme dans l'autre on écrit :

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)}$$

avec dans le dernier produit un des facteurs qui tend vers 0 et l'autre borné, donc leur produit tend vers 0. □

Remarque II.7. *Comme un* o *est aussi un* O*, alors on retrouve la transitivité des* o*.*

Corollaire II.8. *Avec les mêmes notations :*
1. *si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$;*
2. *si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$.*

Démonstration. Comme un équivalent est un O. □

Exemples II.9.
1. *Au voisinage de* 0*, on a :* $x^3 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)$ *et* $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$*, donc* $x^3 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(\ln(1+x))$*, c'est-à-dire que :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\ln(1+x)} = 0$.
2. *Au voisinage de* $+\infty$ *:* $x^2\sin(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}(x^2)$ *et* $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} e^x$ *donc* $x^2\sin(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(e^x)$*, c'est-à-dire que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\sin(x)}{e^x} = 0$.

Remarque II.10. *Ces résultats permettent aussi de regrouper différentes expressions dans des* o *: soit parce que l'une est négligeable et que l'autre est du même ordre de grandeur, soit parce qu'elles sont toutes deux négligeables face à deux quantités comparables.*

Exemple II.11. *On considère f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 4 + \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} 3x + 2 + \mathrm{o}(1)$. Alors :*

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\underset{x\to+\infty}{=} \left(4 + \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot (3x + 2 + \mathrm{o}(1)) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} 12x + 11 + \underbrace{\frac{2}{x} + \mathrm{o}(1) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)}_{=\mathrm{o}(1)} \end{aligned}$$

qui ne peut pas être davantage simplifiée comme expression, comme ni $12x$ ni 11 ne tendent vers 0 en $+\infty$ (donc ne sont des $\mathrm{o}(1)$).

II.2 Composition et relations de comparaisons

Proposition II.12 (Composition à droite)**.** *On considère $\varphi : J \to I$ et $b \in \overline{J}$ tel que $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = a$. Alors pour f, g définies sur I :*

1. *si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $(f \circ \varphi)(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}((g \circ \varphi)(x))$;*
2. *si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $(f \circ \varphi)(x) \underset{x\to b}{\sim} (g \circ \varphi)(x)$.*

Démonstration. Par composition des limites. □

Remarques II.13.

1. *Dans le premier résultat, on peut remplacer les* o *par des* O.
2. *Un cas très utile est lorsque φ est une translation : on peut ainsi ramener l'étude locale d'une fonction f au voisinage de $a \neq 0$ en étudiant en 0 la fonction $x \mapsto f(x + a)$.*
3. *On a seulement ce résultat sur les compositions : les compositions à droite se comportent bien. Pour les compositions à gauche, c'est à traiter au cas par cas, et il faudra systématiquement le redémontrer.*

Exemple II.14. *On a vu que $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$. Comme $\lim\limits_{x\to0} x \cdot \ln(x) = 0$, alors on déduit que :*

$$\sin(x \cdot \ln(x)) \underset{x\to0}{\sim} x \cdot \ln(x).$$

De même, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, alors :

$$\sin\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}.$$

Proposition II.15. *Si f, g sont définies sur I, alors :*

1. *$e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)}$ si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x)) = 0$;*
2. *si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, avec f (ou g) positive, tendant vers une limite $l \neq 1$ (finie ou non) en a, alors : $\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(g(x))$.*

Démonstration.

1. Par équivalences, on a, comme l'exponentielle ne s'annule jamais :

$$\begin{aligned} e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)} &\Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} \underset{x\to a}{\to} 1 \\ &\Leftrightarrow e^{f(x)-g(x)} \underset{x\to a}{\to} 1 \\ &\Leftrightarrow f(x)-g(x) \underset{x\to a}{\to} 0 \end{aligned}$$

   par continuité de exp et de ln pour la dernière équivalence.

2. Avec les conditions imposées, on a que $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 1$ et $\ln(g(x)) \to \ln(l) \neq 0$. Donc $\ln(g(x))$ ne s'annule pas sur un voisinage de a et sur ce voisinage :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln(g(x)) + \ln(f(x)) - \ln(g(x))}{\ln(g(x))} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} \underset{x\to a}{\to} 1 + \frac{0}{\ln(l)} = 1$$

   d'où le résultat.

□

Remarques II.16.

1. *Le cas de* exp *a une utilité assez limitée en fait puisque :*
   — *avec $f(x) = x$ et $g(x) = x+1$, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ mais $e^{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\not\sim} e^{g(x)}$;*
   — *avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$ on a $e^{f(x)} \underset{x\to 0}{\sim} e^{g(x)}$ mais $f(x) \underset{x\to 0}{\not\sim} g(x)$.*
2. *Pour le logarithme : il faudra toujours le redémontrer, il faut bien faire attention à ce que la limite ne soit pas 1, et la réciproque est fausse :*
   (a) *avec $f(x) = 1+x$ et $g(x) = 1+x^2$, on a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$, mais $\ln(f(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\not\sim} x^2 \underset{x\to 0}{\sim} \ln(g(x))$;*
   (b) *avec $f(x) = x$ et $g(x) = 2x$, on a $\ln(f(x)) = \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x) + \ln(2) = \ln(g(x))$ mais $f(x) \underset{x\to+\infty}{\not\sim} g(x)$.*

III Analyse asymptotique

III.1 Comparaisons et limites

Proposition III.1. *Si f est définie sur I, alors :*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Si f ne s'annule pas sur I, on a de plus :

$$1 \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(f(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty.$$

Démonstration. Le premier point est directement la définition.
Pour le second, on a :

$$1 \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(f(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty.$$

□

Remarques III.2.

1. *On peut remplacer* 1 *par n'importe quelle constante non nulle, ou même n'importe quelle fonction continue de limite non nulle.*
2. *La valeur absolue est indispensable dans le second cas, pour transformer la forme indéterminée* $\frac{1}{0}$ *en* $\frac{1}{0^+} = +\infty$.

Corollaire III.3. *Si f est définie sur I et $l \in \mathbb{R}$, alors :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} l + \mathrm{o}(1).$$

Démonstration. On a directement :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a}(f(x) - l) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - l) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(1) \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} l + \mathrm{o}(1).$$

□

Corollaire III.4. *Si f, g sont définies sur I, avec g ne s'annulant pas sauf éventuellement en a et telles que $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.*
Alors : $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

Démonstration. Il suffit de dire que $\lim_{x\to a} g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(1)$, et donc par transitivité $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(1)$ ce qui donne le résultat. □

Remarque III.5. *On avait aussi vu qu'un* o *d'un* O *est un* o, *donc on a le même résultat si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et que g est bornée au voisinage de a, mais c'est moins souvent utile.*

Proposition III.6 (Équivalent par encadrement)**.** *Si f, g, h sont définies sur I avec f (ou h) ne s'annulant pas, $f \leq g \leq h$ et $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.*

Démonstration. En divisant l'inégalité par $f(x)$, on a selon le signe de $f(x)$:

— si $f(x) > 0$:

$$1 = \frac{f(x)}{f(x)} \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq \frac{h(x)}{f(x)}$$

— si $f(x) < 0$:

$$1 = \frac{f(x)}{f(x)} \geq \frac{g(x)}{f(x)} \geq \frac{h(x)}{f(x)}$$

et donc dans tous les cas :

$$\min\left(1, \frac{h(x)}{f(x)}\right) \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq \max\left(1, \frac{h(x)}{f(x)}\right)$$

dont les deux membres extrêmes tendent vers 1 pour $x \to a$ comme $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$. Par encadrement, on déduit que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$, ce qui prouve l'équivalence. □

Remarques III.7.

1. *On peut aussi travailler directement en manipulant les* o *et les* O. *Par l'inégalité vérifiée par f, g, h on a :*

$$0 \leq g - f \leq h - f$$

et donc par encadrement : $g(x) - f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(h(x) - f(x)) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(f(x))$. Ce qui donne la relation d'équivalence.

2. *On a aussi* $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$*, donc en pratique on choisira, parmi les expressions de* f *ou de* h*, celle qui est la plus simple pour avoir un équivalent le plus simple possible pour* g*.*

Proposition III.8. *Si* $l \in \mathbb{R}^*$*, et* f *une fonction définie sur* I*, alors :*

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} l \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = l.$$

Démonstration. On a directement :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} l \Leftrightarrow \frac{f(x)}{l} \underset{x\to a}{\to} 1 \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\to} l$$

□

Remarques III.9.

1. *Si la limite est nulle, alors on ne peut rien dire en termes d'équivalents : la seule fonction équivalente à la fonction nulle est la fonction nulle elle-même. On n'écrira donc* ***jamais*** *que* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$*.*
2. *Si le quotient* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a une limite en* a *(finie ou non), alors on peut toujours comparer* f *et* g*. Plus précisément, si on note* $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*, alors :*
   — *si* $l = 0$ *: alors* $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ *;*
   — *si* $l = \pm\infty$ *: alors* $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(f(x))$ *;*
   — *si* $l \in \mathbb{R}^*$ *: alors* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} l \cdot g(x)$*.*

Proposition III.10. *Si* f *est définie sur* I*, alors :*

1. $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(1)$ *si, et seulement si,* $|f|$ *est majorée sur un voisinage de* a *;*
2. $1 \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(f(x))$ *si, et seulement si,* $\left|\dfrac{1}{f}\right|$ *est majorée sur un voisinage de* a*.*

Démonstration. Par définition, en notant qu'une fonction est bornée si, et seulement si, sa valeur absolue est majorée. □

Proposition III.11. *Si* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$*, alors sur un voisinage de* a *les fonctions* f *et* g *ont le même signe.*

Démonstration. Comme $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors pour x suffisamment proche de a on obtient : $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$.
Et pour un tel x : $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} g(x)$ est du signe de $g(x)$. □

Proposition III.12. *Si* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$*, alors* f *a une limite en* a *si, et seulement si,* g *en a une, et dans ce cas les limites sont égales.*

Démonstration. Par symétrie de $\underset{x\to a}{\sim}$, il suffit de montrer une implication.
Supposons que g possède une limite l (finie ou non) en a. Alors :

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 1} \underbrace{g(x)}_{\to l} \underset{x\to a}{\to} l$$

donc f a même limite que g. □

Méthode III.13. *Pour calculer une limite, il suffit de déterminer un équivalent de l'expression à étudier. Il faudra tout de même parfois avoir recours à des calculs avec des* o *ou des* O *pour arriver à des équivalents. On essaiera toujours d'avoir un équivalent le plus simple possible :*

— *idéalement uniquement avec des produits ou quotients fonctions puissance, exponentielle ou logarithmes (et leurs puissances) ;*
— ***toujours à un seul terme*** *: on regroupe toujours les termes d'un équivalent :*
  — *soit ils sont du même ordre de grandeur et on les rassemble ;*
  — *soit l'un est négligeable devant l'autre et on le supprime.*

III.2 Exemples fondamentaux

Remarque III.14. *Si on travaille avec des fonctions continues, le cas intéressant est lorsque les limites considérées sont nulles, ou infinies : dans les autres cas, les relations de comparaison n'apportent pas grand chose dans la compréhension des fonctions.*
C'est justement là où les relations de comparaisons sont importantes : elles lèvent les formes indéterminées en disant plus précisément à quel point une quantité est grande ou petite.

Théorème III.15 (Croissances comparées en $+\infty$)**.** *On a les relations de comparaisons suivantes :*

1. *si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *:* $\alpha < \beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} x^\beta$ *;*
2. *si* $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ *:* $a < b \Leftrightarrow a^x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(b^x)$ *;*
3. *si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ *:* $(\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\beta\right)$ *;*
4. *si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ *:* $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{\beta x}\right)$*.*

Démonstration. Découle des limites classiques et des croissances comparées. Dans chaque cas, comme les fonctions ne s'annulent pas, on peut étudier la limite du quotient. □

Théorème III.16 (Croissances comparées en 0)**.** *On a les relations de comparaisons suivantes :*

1. *si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, alors :* $\alpha > \beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{x\to0}{=} \mathrm{o}\left(x^\beta\right)$ *;*
2. *si* $\alpha > 0$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *:* $x^\alpha \underset{x\to0}{=} \mathrm{o}\left(|\ln(x)|^\beta\right)$ *et* $|\ln(x)|^\beta \underset{x\to0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$*.*

Démonstration. Idem. □

Corollaire III.17. *Une fonction polynomiale non nulle est équivalente à son monôme de plus haut degré en* $\pm\infty$ *et à son monôme de plus petit degré en* 0*. Concrètement, si* $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_m x^m$*, avec* $m \leq n$ *et* $a_n, a_m \neq 0$*, alors :*

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n \text{ et } f(x) \underset{x\to0}{\sim} a_m x^m.$$

Démonstration. Avec les mêmes notations, il vient que :

— pour tout $k > m$: $x^k \underset{x\to0}{=} \mathrm{o}(x^m)$;
— pour tout $k < n$: $x^k = \underset{x\to\pm\infty}{=} \mathrm{o}(x^n)$;

et ainsi en sommant :

$$f(x) \underset{x\to0}{=} a_m x^m + \mathrm{o}(x^m) \underset{x\to0}{\sim} a_m x^m \text{ et } f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} a_n x^n + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$

□

Proposition III.18. *Si f est dérivable en a, alors :*

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a).$$

En particulier, si $f'(a) \neq 0$, alors :

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a) \cdot (x-a).$$

Démonstration. La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, la taux $\tau_{a,f}(x)$ tend vers $f'(a)$ en a, c'est-à-dire que :

$$\tau_{a,f}(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x \to a}{=} f'(a) + \mathrm{o}(1).$$

En multipliant tout par $x-a$ et en ajoutant $f(a)$, c'est le cas si, et seulement si :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a).$$

□

Remarque III.19. *On a même un résultat plus fort : si on peut trouver une écriture du type $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + l(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$, alors f est dérivable en a, de dérivée $f'(a) = l$.*
Et la version avec des équivalents aussi peut s'utiliser dans l'autre sens.

Corollaire III.20. *On a les équivalents suivants en 0 :*

1. $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$;
2. $\dfrac{1}{1+x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -x$;
3. $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$;
4. *si* $\alpha \in \mathbb{R}^*$: $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$;
5. $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$;
6. $\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$;
7. $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$;
8. $\mathrm{Arccos}(x) - \frac{\pi}{2} \underset{x \to 0}{\sim} -x$;
9. $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$;
10. $\mathrm{sh}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$.

Démonstration. Découle des calculs de dérivées en 0. □

Remarques III.21.

1. *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve que $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{2}$, ou que $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)$.*

   Avec $\alpha = -1$, on retrouve le cas de $\dfrac{1}{1+x}$.
2. *Tous les équivalents précédents s'expriment également en termes de o. Par exemple, les premiers points donnent :*

   $$e^x - 1 \underset{x \to 0}{=} x + \mathrm{o}(x) \text{ et } \frac{1}{1+x} - 1 \underset{x \to 0}{=} -x + \mathrm{o}(x)$$

   qu'on écrira plutôt :

   $$e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \mathrm{o}(x) \text{ et } \frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + \mathrm{o}(x).$$

3. *Si $f'(a) = 0$, on ne peut pas avoir l'équivalent de $f(x) - f(a)$ aussi facilement. Par exemple, pour* cos *en 0, la méthode précédente ne donnerait pas d'équivalent, mais seulement que :*

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \mathrm{o}(x).$$

4. *On prend bien garde à appliquer l'équivalent au bon endroit. Par exemple, si l'on souhaite un équivalent pour x proche de 0 de $\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}$, on a deux possibilités :*
   - *ou bien par une dérivée : on considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2+x}$ au voisinage de 0, qui est dérivable sur son ensemble de définition avec :*

     $$\forall x \in]-2;+\infty[,\ f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}$$

     et donc :

     $$f(x) - f(0) = \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\sim} f'(0)\cdot x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{4}.$$

   - *ou en se ramenant à une situation connue :*

     $$\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x/2} - 1\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{4}$$

     où on a en fait composé à droite, comme $\lim_{x\to 0}(x/2) = 0$.

Exemple III.22. *Déterminons un équivalent de $\cos(x) - 1$ en 0. Pour cela, on utilise que $\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Et par le fait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$, on déduit que :*

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - 2\left(\frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)\right)^2$$

Mais on a :

$$\left(\frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\cdot(1+\mathrm{o}(1))\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot(1+\mathrm{o}(1))^2 = \frac{x^2}{4}\cdot(1+\mathrm{o}(1)) = \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2)$$

et donc en réinjectant cette valeur :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$$

c'est-à-dire que : $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
On peut aussi utiliser directement les équivalents, comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, et donc par composition à droite :

$$\cos(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -2\frac{x^2}{4} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

qu'on peut aussi écrire :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2).$$

III.3 Calculs de limites

Exemples III.23. *Reprenons les calculs de limites du chapitre sur les fonctions usuelles, en utilisant les équivalents.*

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3+1)}{x^4-5}$:
$$\frac{\ln(x^3+1)}{x^4-5} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x^3)}{x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3\ln(x)}{x^4} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^4+1)}{x^2+3}$:
$$\frac{\ln(x^4+1)}{x^2+3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x^4)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x+2}$:
$$\frac{e^{3x}}{x+2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{3x}}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^3+1}$:
$$\frac{e^{3x}}{x^3+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{3x}}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x\ln x+\ln x}{e^x+x\sin x}$:
$$\frac{x^3-3x\ln x+\ln x}{e^x+x\sin x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{x^3+\mathrm{o}(x^2)+\mathrm{o}(x)}{e^x+\mathrm{O}(x)} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{x^3+\mathrm{o}(x^3)}{e^x+\mathrm{o}(e^x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^3}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple III.24. *Calculons la limite en* $+\infty$ *de* $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-2x^2}$.
On pourrait utiliser des quantités conjuguées, en notant que $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$, *mais les calculs deviennent rapidement compliqués. On va plutôt utiliser des* o :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-2x^2} = x\cdot\left(\sqrt[3]{1+\tfrac{1}{x}} - \sqrt[3]{1-\tfrac{2}{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\cdot\left(\frac{1}{3x}+\mathrm{o}\left(\tfrac{1}{x}\right) - \frac{-2}{x}+\mathrm{o}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} x\cdot\frac{3}{3x} = 1 \end{aligned}$$

et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Remarque III.25. *Dans cet exemple, si on procédait par équivalent pour les deux racines, on trouverait :* $\sqrt[3]{x^3+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ *et* $\sqrt[3]{x^3-2x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. *En repassant par l'écriture avec les* o *(pour soustraire les équivalents), on déduit que :*
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - x + \mathrm{o}(x) = \mathrm{o}(x)$$
ce qui non seulement ne donne pas d'équivalent (le o *n'est pas négligeable par rapport à l'expression qui le précède, à savoir* 0 *ici), et pas non plus la limite : un* $\mathrm{o}(x)$ *en* $+\infty$ *peut avoir n'importe quel comportement :*
- *limite* $+\infty$: $\ln(x)$;
- *limite* $-\infty$: $-\ln(x)$;
- *limite finie* $l \in \mathbb{R}$: l ;
- *pas de limite :* $\sin(x)$ *ou* $\sqrt{x}\sin(x)$

Inversement, une égalité à un $\mathrm{o}(1)$ *près donne toujours la limite, puisque cela revient à connaître l'expression à une quantité qui tend vers* 0 *près.*

Exemple III.26.
Déterminons, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x\cdot\ln(x))}{x^\alpha}$ *: on a déjà montré que* $\sin(x\ln(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)$*, et donc :*
$$\frac{\sin(x\cdot\ln(x))}{x^\alpha} \underset{x\to 0}{\sim} x^{1-\alpha}\ln(x) \underset{x\to 0}{\to} \begin{cases} 0 & si \quad \alpha < 1 \\ -\infty & si \quad \alpha \geq 1 \end{cases}.$$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \sin\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ *: on a déjà montré que* $\sin\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x}$*, et donc :*
$$x^\alpha \sin\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\alpha-1}\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \begin{cases} 0 & si \quad \alpha < 1 \\ +\infty & si \quad \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

IV Comparaison de suites

Définition IV.1. *Soient (u_n), (v_n) deux suites, avec v_n ne s'annulant pas à partir d'un rang. On dit que (u_n) est* ***négligeable devant*** *(v_n) (resp.* ***dominée par*** *(v_n),* ***équivalente à*** *(v_n)) si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0 (resp. est bornée, tend vers 1).*
On note alors $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ (resp. $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, $u_n \sim v_n$).

Remarques IV.2.

1. *Il s'agit donc de la même définition que pour les fonctions, en considérant uniquement le cas où $a = +\infty$ (dont on a vu que c'est le seul point adhérent important pour les suites). Cela justifie au passage que l'on ne fasse pas apparaître le $n \to +\infty$ dans les notations.*
De fait, tous les résultats précédents restent valables, notamment les liens entre les relations et les manières de les manipuler.
2. *On peut généraliser la définition pour inclure les suites qui s'annuleraient un nombre infini de fois, en disant qu'il existe un rang n_0 et une suite (w_n) tendant vers 0, ou bornée, ou tendant vers 1 (selon les relations) telle que :*
$$\forall n \geq n_0,\ u_n = w_n v_n.$$

Proposition IV.3. *Si u, v sont deux suites telles que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ (resp. $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, $u_n \sim v_n$) et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, alors $u_{\varphi(n)} = \mathrm{o}(v_{\varphi(n)})$ (resp. $u_{\varphi(n)} = \mathrm{O}(v_{\varphi(n)})$, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$).*

Démonstration. On verra qu'une telle fonction φ vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$. Le résultat se déduit par composition à droite. □

Remarque IV.4. *On verra dans un prochain chapitre que les fonctions φ de l'énoncer sont très importante : moralement, cela revient à ne garder que certains termes d'une suite. Une telle suite est appelée* ***suite extraite*** *et conserve certaines propriétés de la suite initiale.*

Proposition IV.5. *Si f, g sont deux fonctions définies sur I, et (u_n) une suite d'éléments de I qui tend vers a, alors :*

1. *si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(u_n) = \mathrm{o}(g(u_n))$;*
2. *si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$, alors $f(u_n) = \mathrm{O}(g(u_n))$;*
3. *si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(u_n) \sim g(u_n)$.*

Démonstration. C'est un cas particulier de composition à droite. □

Remarque IV.6. *Il est fondamental d'avoir la même suite, et pas seulement des suites équivalentes. Sinon, cela reviendrait à une composition à gauche, dont on a vu qu'elle se comporte en général mal avec les comparaisons.*

Chapitre 10

Les ensembles

I Appartenance et inclusion

Définition I.1. *Un* ***ensemble*** *est une collection d'objets. Chacun des objets est appelé* ***élément****. Si x est un élément de l'ensemble E, on notera $x \in E$, qui se lit "x appartient à E". Inversement, si y n'est pas un élément de E, on notera $y \notin E$, qui se lit "y n'appartient pas à E".*

Définition I.2. *Si E et F sont deux ensembles, on dira que F est une* ***partie*** *(ou un* ***sous-ensemble****) de E, ou que F est inclus dans E, si tout élément de F est un élément de E. On notera alors : $F \subset E$.*

Remarque I.3. *Un ensemble E peut être décrit en* ***extension*** *(on énumère les éléments) ou en* ***compréhension*** *(on donne une propriété satisfaite par les éléments). Par exemple, l'ensemble E des entiers naturels plus petits ou égaux à 3 peut s'écrire :*
- *en extension : $E = \{0; 1; 2; 3\}$;*
- *en compréhension : $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 3\}$.*

Définition I.4. *On dit que deux ensembles E et F sont* ***égaux*** *s'ils ont exactement les mêmes éléments, et on note alors $E = F$.*

Proposition I.5. *Les ensembles E et F sont égaux si, et seulement si, on a les inclusions $E \subset F$ et $F \subset E$.*

Proposition I.6. *L'inclusion est* ***transitive*** *: si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.*

Proposition-Définition I.7. *On appelle* ***ensemble vide****, que l'on note $\emptyset$, l'ensemble ne contenant aucun élément.*
L'ensemble vide est sous-ensemble de tout autre ensemble, et il est unique.

Démonstration. Si A est un ensemble vide, et E un ensemble, comme A ne contient aucun élément, tout élément de A est dans E : donc $A \subset E$.
Si B est un autre ensemble vide, alors : $A \subset B$ et $B \subset A$, donc $A = B$. □

Définition I.8. *Un ensemble possédant un seul élément est appelé* ***singleton****, et on le note $\{a\}$.*

Définition I.9. *Si E est un ensemble, on notera $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toute les parties de E, c'est-à-dire que :*

$$F \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow F \subset E.$$

Remarque I.10. *Les ensembles $\emptyset$ et E sont toujours des éléments de $\mathcal{P}(E)$.*

Exemple I.11. *Si $E = \{1; 2; 3\}$, alors :*

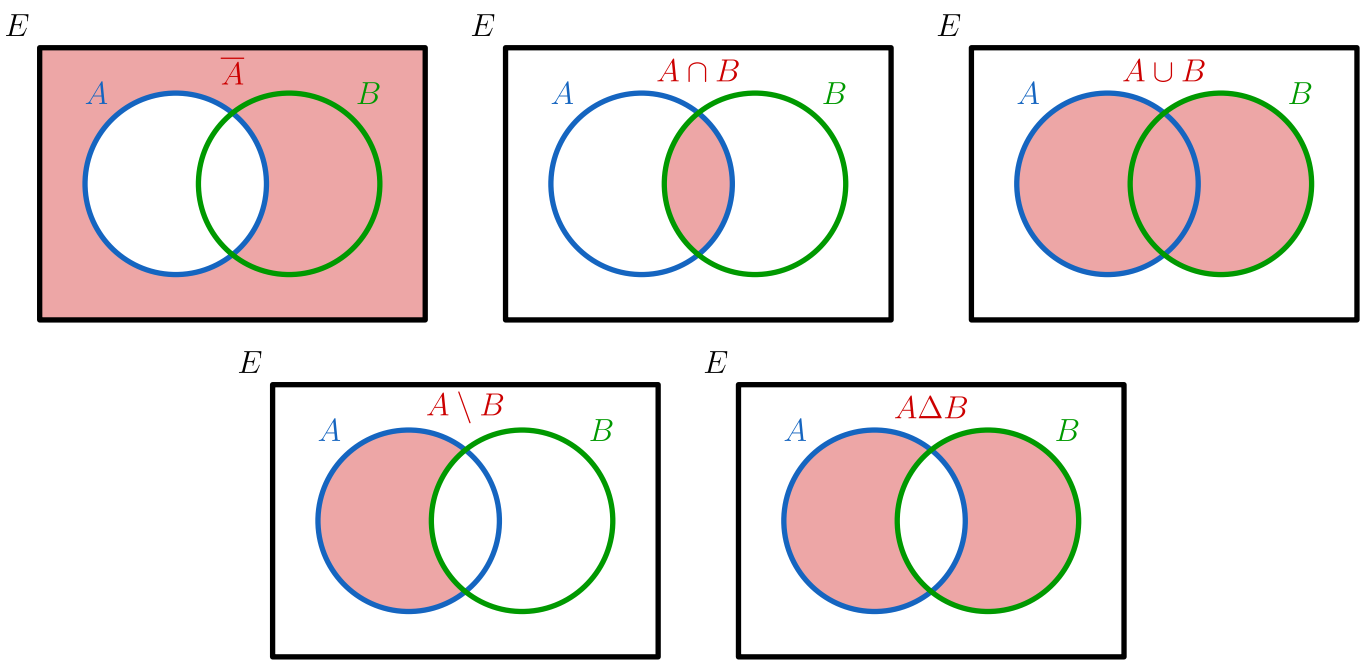
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}.$$

II Opérations sur les ensembles

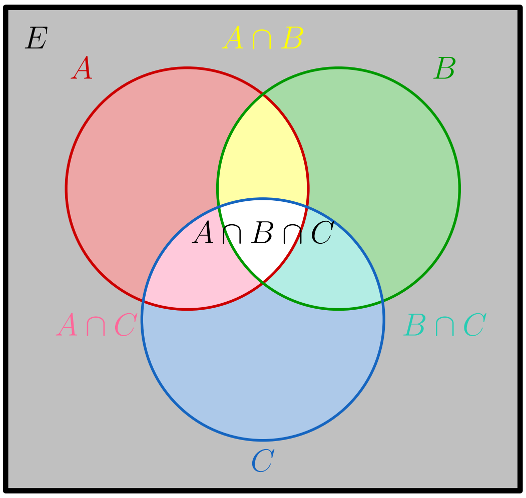
Définition II.1. *Si E est un ensemble, et A, B deux parties de E, on définit :*

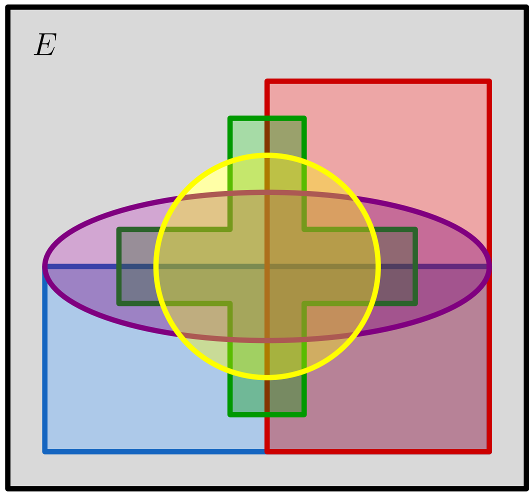
1. *le* ***complémentaire*** *de A dans E, noté $E - A$, $E \setminus A$, A^C ou $\overline{A}$ par :*
$$\overline{A} = \{x \in E \,|\, x \notin A\};$$
2. *l'****intersection*** *de A et B est :*
$$A \cap B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\};$$
3. *la* ***réunion*** *(ou l'****union****) de A et B est :*
$$A \cup B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\};$$
4. *la* ***différence*** *de A et B est :*
$$A - B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B};$$
5. *la* ***différence symétrique*** *de A et B est :*
$$A \Delta B = \{x \in E \,|\, x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B\} = A \cup B - A \cap B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

On les représente par des ***diagrammes de Venn*** *(ou diagramme patate) :*



Remarque II.2. *Plus généralement, les diagrammes de Venn permettent de mieux comprendre des ensembles, en permettant de visualiser séparément des différents éléments selon leur appartenance à chaque ensemble considéré. Cette méthode devient rapidement compliquée lorsque l'on prend beaucoup d'ensembles. Par exemple, on donne ci-dessous les diagrammes de Venn génériques pour 3 et 5 ensembles :*





Proposition II.3. *Si A, B, C sont trois parties d'un ensemble E, alors :*

1. *commutativité de la réunion et de l'intersection : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$;*
2. *associativité de la réunion et de l'intersection :*
   — $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$;
   — $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.
3. *lois de de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;*
4. *distributivité de la réunion par rapport à l'intersection et réciproquement :*
   — $C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$;
   — $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$.

Remarque II.4. *L'intersection et la réunion se généralisent à davantage de parties. Si $A_1, \dots, A_n$ sont des parties de E, on pose :*

$$\begin{array}{lcl} A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n & = & \cap_{i=1}^n A_i & = & \{x \in E \,|\, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \, x \in A_i\} \\ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n & = & \cap_{i=1}^n A_i & = & \{x \in E \,|\, \exists i \in \{1, \dots, n\}, \, x \in A_i\} \end{array}.$$

Remarque II.5. *Il y a une correspondance entre logique et ensembles :*

Ensembliste	*Logique*
Ensemble : A	*Assertion :* $x \in A$
Inclusion : $A \subset B$	*Implication :* $x \in A \Rightarrow x \in B$
Égalité : $A = B$	*Équivalence :* $x \in A \Leftrightarrow x \in B$
Complémentaire : $\overline{A}$	*Négation :* $\neg (x \in A)$
Union : $A \cup B$	*Disjonction :* $x \in A \vee x \in B$
Intersection : $A \cap B$	*Conjonction :* $x \in A \wedge x \in B$

III Partitions

Définition III.1. *Si A, B sont deux ensembles, on dit qu'ils sont* ***disjoints*** *si : $A \cap B = \emptyset$.*

Définition III.2. *Soit P une partie de $\mathcal{P}(E)$. On dit que :*

1. *P est un* ***recouvrement*** *de E si : $\cup_{A \in P} A = E$;*
2. *P est une* ***partition*** *de E si P est un recouvrement dont tous les éléments sont non vides et deux-à-deux disjoints, c'est-à-dire que :*

$$\forall A \in P, \; A \neq \emptyset$$

et

$$\forall A, B \in P, \; A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Remarques III.3.

1. *Si P est un recouvrement de E, alors :*

$$\forall x \in E,\ \exists A \in P,\ x \in A$$

tandis que si P est une partition de E, alors :

$$\forall x \in E,\ \exists! A \in P,\ x \in A.$$

2. *Si P est un recouvrement, c'est une partition si, et seulement si :*

$$\forall A, B \in P,\ A \neq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Exemples III.4. *L'ensemble $\{[n; n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un recouvrement de $\mathbb{R}$, mais pas une partition. On peut voir par exemple que $[0;1] \cap [1;2] = \{1\} \neq \emptyset$.*
En revanche, l'ensemble $\{[n; n+1[\mid n \in \mathbb{Z}\}$ est une partition de $\mathbb{R}$. Plus précisément, si $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in [n; n+1[\Leftrightarrow n = \lfloor x \rfloor.$$

Remarque III.5. *On travaillera souvent avec des recouvrements disjoints : ce sont comme des partitions, mais qui autorisent d'avoir des occurrences de l'ensemble vide. L'idée est que l'on cherche en fait à avoir une famille de parties de E telle que tout élément de E appartienne à une et une seule de ces parties.*

IV Produits cartésiens

Définition IV.1. *Si E, F sont deux ensembles, on définit le* ***produit cartésien*** *de E par F par :*

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Plus généralement, si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles, on définit :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}.$$

En particulier, si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on note :

$$E \times \cdots \times E = E^n.$$

Remarque IV.2. *Il faut bien prendre garde aux notations, pour ne pas confondre le couple (x, y) avec la paire $\{x, y\}$.*

Exemple IV.3. *Un repère permet d'identifier chaque point du plan au couple de ses coordonnées, et ainsi d'identifier le plan à $\mathbb{R}^2$.*

Chapitre 11

Applications

I Notion d'application

Définition I.1. *Si E, F sont deux ensembles, une* ***application*** *f de E vers F est la donnée, pour tout élément x de E, d'un* ***unique*** *élément y de F, que l'on note $f(x)$.*
On note alors l'application f par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. \quad \text{ou } E \xrightarrow{f} F.$$

On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E vers F.

Proposition-Définition I.2. *Étant donnée $f \in \mathcal{F}(E, F)$, on définit son* ***graphe*** *comme l'ensemble :*

$$\Gamma = \{(x, y) \in E \times F \mid f(x) = y\}.$$

Le graphe vérifie l'assertion :

$$\forall x \in E, \ \exists! y \in F, \ (x, y) \in \Gamma.$$

Et tout sous-ensemble de $E \times F$ vérifiant cette assertion définit une unique application de E dans F (autrement dit, une application est entièrement déterminée par son graphe).

Exemple I.3. *On considère l'application f de $\{A; B; C\}$ sur $\{a; b; c\}$ définie par : $f(A) = b$, $f(B) = a$ et $f(C) = b$. On peut représenter f par un diagramme sagittaire, ou par un diagramme cartésien :*

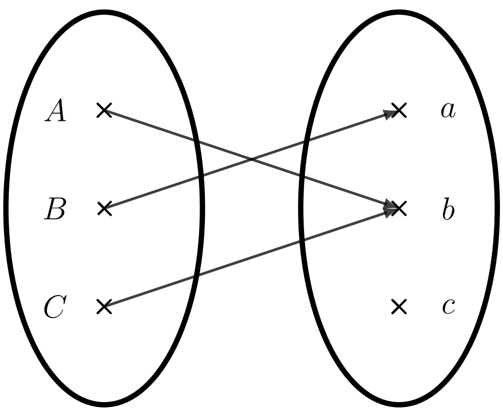


Diagramme sagittaire.

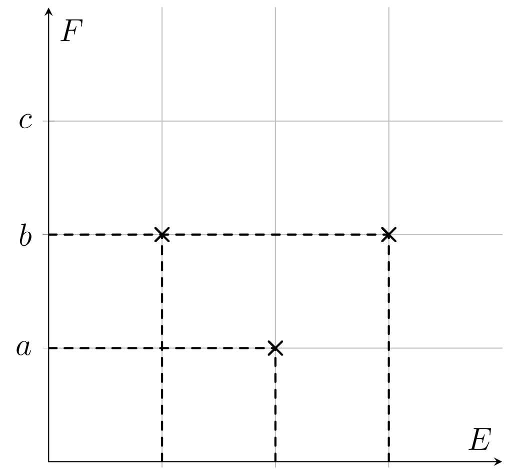


Diagramme cartésien.

Remarque I.4. *Une (même) application peut être définie de différentes manières. Par exemple, la fonction valeur absolue peut être définie sur $\mathbb{R}$:*

1. *explicitement :* $|x| = \sqrt{x^2}$;
2. *par disjonction de cas :* $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & sinon \end{cases}$;
3. *implicitement :* $|x|$ *est l'unique solution positive ou nulle de l'équation :* $y^2 = x^2$.

Définition I.5. *Soit E un ensemble.*
On appelle application ***identité*** *de E l'application de E dans E définie par $x \mapsto x$, et on la note Id_E.*
Si A est une partie de E, on définit la ***fonction indicatrice*** *de A comme l'application de E dans $\{0;1\}$, notée $\mathbb{1}_A$, et définie par :*

$$\mathbb{1}_A : x \mapsto \begin{cases} 0 & si & x \notin A \\ 1 & si & x \in A \end{cases}$$

Proposition I.6. *Soit E un ensemble et A, B deux parties de E :*

1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$;
2. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$;
3. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cup B}$.
4. $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.

Démonstration. Par disjonction de cas. □

Définition I.7. *Si $f : E \to F$ est une application, et $(x, y) \in E \times F$ tel que $f(x) = y$. On dit que :*

1. *y est* ***l'image*** *de x par f ;*
2. *x est* ***un antécédent*** *de x par f*

Remarque I.8. *L'image d'un élément de E est toujours unique. En revanche, un élément de F peut très bien ne posséder aucun antécédent, ou un seul, ou même une infinité.*

Définition I.9. *Si E et I sont des ensembles, on appelle* ***famille*** *d'éléments de E indexés par I une application x de I sur E. On notera alors x_i pour désigner $x(i)$. Et la famille x sera notée $(x_i)_{i\in I}$.*

Exemple I.10. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de réels indexés par $\mathbb{N}$.*

Définition I.11. *Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$, et A une partie non vide de E, on définit la* ***restriction*** *de f à A comme l'application de A sur F coïncidant avec f, c'est-à-dire :*

$$f|_A : \begin{cases} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}.$$

Inversement, si $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(A, F)$ vérifient que $f|_A = g$, on dit que f est un ***prolongement*** *de g.*
Enfin, si B est une partie de F telle que f est à valeurs dans B, on appelle ***corestriction*** *comme l'application de E sur B coïncidant avec f, c'est-à-dire :*

$$f|^B : \begin{cases} E & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}.$$

Définition I.12. *Si E, F, G sont trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$, on définit la* ***composée*** *de g et f, notée $g \circ f$, comme l'application de E dans G définie par :*

$$\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right).$$

Remarque I.13. *Si $f \in \mathcal{F}(E, E)$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\ fois}$ (avec la convention que $f^0 = \mathrm{id}_E$).*

Proposition I.14. *La composition est* ***associative*** *: si $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$ et $h \in \mathcal{F}(G, H)$, alors : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

II Image directe et image réciproque

Définition II.1. *Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, A une partie de E et B une partie de F.*

1. *On appelle* ***image directe*** *de A l'ensemble :*
$$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}.$$
2. *On appelle* ***image réciproque*** *de B l'ensemble :*
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}.$$

Remarque II.2. *Les images directes et réciproques correspondent aux assertions suivantes :*
$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A,\ f(x) = y$$
$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Définition II.3. *Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$, on appelle* ***image*** *de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, l'image directe de E par f :*
$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(x) \,|\, x \in E\}.$$
Si $\mathrm{Im}(f) \subset B$, pour une partie B de F, on dira que f est ***à valeurs*** *dans B.*

Remarque II.4. *On n'a pas toujours $f(E) = F$, en revanche on a toujours $f^{-1}(F) = E$.*

Exemples II.5. *Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$. Alors :*

1. $f\left([0;1]\right) = [0;1]$ *;*
2. $f\left(]-1;2]\right) = [0;4]$ *;*
3. $f^{-1}\left([0;2]\right) = [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ *;*
4. $f^{-1}\left([-4;1]\right) = [-1;1]$ *;*
5. $f^{-1}\left(\{9\}\right) = \{-3;3\}$ *;*
6. $f^{-1}\left(]-12;-1]\right) = \emptyset$.

Définition II.6. *Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $A \subset E$, on dira que A est* ***stable*** *par f si $f(A) \subset A$.*

Proposition II.7. *Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$, A, B deux parties de E et C, D deux parties de F. Alors :*

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ *;*
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ *;*
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ *(**Attention :** on n'a pas égalité en général)*
4. $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$ *;*
5. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ *;*
6. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ *;*
7. $f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$.

Démonstration. 1. Supposons que $A \subset B$:
$$\begin{array}{rcl} y \in f(A) & \Rightarrow & \exists x \in A,\ f(x) = y \\ & \Rightarrow & \exists x \in B,\ f(x) = y \\ & \Rightarrow & y \in f(B) \end{array}$$
Donc $f(A) \subset f(B)$.

2. Montrons les deux inclusions :
   (a) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$:

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A \cup B) & \Rightarrow & \exists x \in A \cup B,\ f(x) = y \\ & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \quad \exists x \in A, & f(x) = y \\ \text{ou } \exists x \in B, & f(x) = y \end{array} \right. \\ & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \quad y \in f(A) \\ \text{ou } y \in f(B) \end{array} \right. \\ & \Rightarrow & y \in (f(A) \cup f(B)) \end{array}$$

   (b) $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$: On applique le résultat précédent à $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$. On a donc : $f(A) \subset f(A \sup B)$ et $f(B) \subset f(A \cup B)$, et donc : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

3. soit $y \in f(A \cap B)$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Mais :
   — comme $x \in A$: alors $y \in f(A)$;
   — comme $x \in B$: alors $y \in f(B)$.
   Et donc $y \in f(A) \cap f(B)$, ce qui prouve l'inclusion. L'autre inclusion est fausse en général, comme le montre la remarque qui suit, donc il n'est pas nécessaire de s'y attarder.

4. Supposons que $C \subset D$:

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(C) & \Rightarrow & f(x) \in C \\ & \Rightarrow & f(x) \in D \\ & \Rightarrow & x \in f^{-1}(D) \end{array}$$

   Donc $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

5. Procédons par équivalences :

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(C \cup D) & \Leftrightarrow & f(x) \in C \cup D \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \quad f(x) \in C \\ \text{ou } f(x) \in D \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \quad x \in f^{-1}(C) \\ \text{ou } x \in f^{-1}(D) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & x \in (f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)) \end{array}$$

6. Procédons par équivalences :

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(C \cap D) & \Leftrightarrow & f(x) \in C \cap D \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \quad f(x) \in C \\ \text{et } f(x) \in D \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \quad x \in f^{-1}(C) \\ \text{et } x \in f^{-1}(D) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & x \in (f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)) \end{array}$$

7. Procédons par équivalences :

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(C - D) & \Leftrightarrow & f(x) \in C - D \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \quad f(x) \in C \\ \text{et } f(x) \notin D \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \quad x \in f^{-1}(C) \\ \text{et } x \notin f^{-1}(D) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & x \in (f^{-1}(C) - f^{-1}(D)) \end{array}$$

$\square$

Remarque II.8. *La plupart des implications précédentes sont en fait des équivalences, et donc les quelques raisonnements par double inclusion pourraient se traiter par équivalence.*
Il faut tout de même faire attention aux quantificateurs qui ne passent pas toujours très bien aux équivalences, comme justement au point 3 où l'implication suivante n'est pas une équivalence :

$$[\exists x \in A \cap B,\ f(x) = y] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \exists x \in A, & f(x) = y \\ \text{et } \exists x \in B, & f(x) = y \end{array} \right. .$$

Remarque II.9. *Pour le cas d'inclusion seule, on peut reprendre* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$. *Avec* $A = \mathbb{R}_-^*$ *et* $B = \mathbb{R}_+^*$, *on a* $f(A) = f(B) = \mathbb{R}_+^*$, *et donc :*

$$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset \text{ et } f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+^*.$$

III Injections, surjections, bijections

Définition III.1. *Soit* $f \in \mathcal{F}(E, F)$. *On dit que* f *est :*

1. ***injective*** *si tout élément de* F *admet* ***au plus*** *un antécédent par* f *;*
2. ***surjective*** *si tout élément de* F *admet* ***au moins*** *un antécédent par* f *;*
3. ***bijective*** *si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de* F *admet* ***un unique*** *antécédent par* f.

Proposition III.2. *Si* $f \in \mathcal{F}(E, F)$, *on a équivalence entre :*

1. f *est injective ;*
2. $\forall x, y \in E,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ *;*
3. $\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Proposition III.3. *De même, on a équivalence entre :*

1. f *est surjective ;*
2. $\mathrm{Im}(f) = F$ *;*
3. $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.

Proposition-Définition III.4. *L'application* $f \in \mathcal{F}(E, F)$ *est bijective si, et seulement si, elle vérifie :*

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y.$$

*On peut alors définir l'****application réciproque*** *de* f, *notée* f^{-1}, *qui est l'unique application définie par :*

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccl} F & \to & E \\ y & \mapsto & x \text{ l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array} \right. .$$

Et on a alors : $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$, *et* f^{-1} *est bijective avec* $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemples III.5.

1. *la fonction* $\mathrm{id}_E : E \to E$ *est bijective, d'inverse elle-même ;*
2. *si* $a, b \in \mathbb{R}$, *la fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{array} \right.$ *est bijective si, et seulement si,* $a \neq 0$, *et son inverse est alors la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$. *On a en fait le résultat plus fort suivant :*

$$a \neq 0 \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}.$$

Pour le montrer, on peut voir que toutes les assertions sont équivalentes au fait que $a \neq 0$ *:*

  — *si $a \neq 0$: alors f est bijective (on a même donné sa réciproque précédemment), donc f est injective et surjective ;*
  — *si $a = 0$: alors :*
    — *$f(\mathbb{R}) = \{b\} \neq \mathbb{R}$ donc f n'est pas surjective ;*
    — *$f(0) = b = f(1)$ donc f n'est pas injective.*

  et ainsi f n'est ni surjective ni injective, et ne peut donc pas être bijective.

3. *Plus généralement, toute application strictement monotone est injective. On a même vu qu'une application strictement croissante sur I réalise une bijection de I sur $f(I)$.*

Proposition III.6. *Soient $f \in \mathcal{F}(E,F), g \in \mathcal{F}(F,G)$ deux applications. Alors :*

1. *si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;*
2. *si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

Démonstration.

1. si $x, y \in E$, alors :
$$f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$$
donc f est injective ;
2. soit $z \in G$. Il existe $x \in E$ tel que : $z = g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$, donc $y = f(x) \in F$ vérifie $g(y) = z$. Donc g est surjective.

□

Théorème III.7. *Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Alors f est bijective si, et seulement si, il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.*
Dans ces conditions, on a : $g = f^{-1}$.

Démonstration. On montre séparément les deux implications :
— nécessité : si f est bijective, alors l'application $g = f^{-1}$ convient ;
— suffisance : si un tel g existe, alors :
  — $g \circ f = \mathrm{id}_E$ est injective, donc f aussi ;
  — $f \circ g = \mathrm{id}_F$ est surjective, donc f aussi.

  Donc f est bijective. Comme $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors : $g \circ f \circ f^{-1} = f^{-1}$, donc $g = f^{-1}$.

□

Remarque III.8. *Il faut bien avec les propriétés sur $f \circ g$ et $g \circ f$. Par exemple, si on prend $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$, alors :*
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f \circ g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$
donc $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$.
Mais $g \circ f = (x \mapsto |x|) \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
Ce qui n'est pas surprenant car f est surjective mais pas injective.
Plus généralement, on pourra voir que $f : E \to F$ admet un inverse à droite (resp. à gauche), c'est-à-dire $g : F \to E$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ (resp. $g \circ f = \mathrm{id}_E$) si, et seulement si, elle est surjective (resp. injective).

Proposition III.9. *Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$. Alors :*

1. *si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective ;*
2. *si f est g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective ;*
3. *si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Démonstration. 1. si $x, y \in E$, alors :

$$g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

2. si $z \in G$, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. De même, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Et donc : $z = g \circ f(x)$.
3. Posons $h = f^{-1} \circ g^{-1}$. Alors :
   — $h \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$;
   — $(g \circ f) \circ h = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_G$
   ce qui donne bien le résultat.

□

Exemples III.10. *1. Si E est un ensemble, l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array} \right.$ est une bijection dont c'est la propre réciproque. On dit que f est **involutive**.*

2. Si E est un ensemble, l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E, \{0;1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$ est une bijection, dont la réciproque est donnée par : $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E, \{0;1\}) & \to & \mathcal{P}(E) \\ \chi & \mapsto & \chi^{-1}(\{1\}) \end{array} \right.$.

Proposition III.11. *Si $f : E \to F$ est bijective, alors pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$ on a :*

$$\underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{en tant qu'image réciproque par } f} = \underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{en tant qu'image directe par } f^{-1}}.$$

Démonstration. Soit $x \in F$. Notons $g = f^{-1}$, et n'utilisons que f^{-1} pour l'image réciproque par f^{-1}. On a :

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(B) & \Leftrightarrow & f(x) \in B \\ & \Leftrightarrow & \exists b \in B,\ f(x) = b \\ & \Leftrightarrow & \exists b \in B,\ x = g(f(x)) = g(b) \\ & \Leftrightarrow & x \in g(B) \end{array}$$

ce qui montre bien que $f^{-1}(B) = g(B)$. □

Chapitre 12

L'ensemble ordonné des réels

I Majorants et minorants

Théorème I.1. *L'ensemble des réels, muni de la relation $\leq$, est un ensemble **totalement ordonné**, c'est-à-dire que la relation $\leq$ est :*

1. *réflexive :* $\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq a$ *;*
2. *transitive :* $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ (a \leq b \text{ et } b \leq c) \Rightarrow a \leq c$ *;*
3. *antisymétrique :* $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a \leq b \text{ et } b \leq a) \Rightarrow a = b$.

et que de plus on peut toujours ordonner deux réels :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b \text{ ou } b \leq a.$$

Démonstration. Découle de la définition de l'inégalité large. □

Remarque I.2. *Les propriétés du théorème définissent plus généralement une **relation d'ordre**. L'inclusion définit par exemple une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ (pour E ensemble fixé). Mais ce n'est pas un ordre total car on peut trouver des ensembles qui ne sont pas inclus l'un dans l'autre.*

Définition I.3. *Étant donné $A \subset \mathbb{R}$, on dit que A est :*

1. ***majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall a \in A,\ a \leq M$. Et on dit alors que M est un **majorant** de A ;*
2. ***minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall a \in A,\ m \leq a$. Et on dit alors que m est un **minorant** de A ;*
3. ***bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.*

Proposition-Définition I.4. *On appelle **maximum** (ou plus grand élément) d'une partie A de $\mathbb{R}$ tout majorant de A qui appartient à A.*
*On appelle de même **minimum** (ou plus petit élément) tout minorant de A qui appartient à A.*
*S'il existe, un maximum (resp. un minimum) est **unique** et on l'appelle **le maximum** (resp. **le minimum**) de A, noté* $\max(A)$ *(resp.* $\min(A)$*).*

Démonstration. Montrons le pour le maximum. Notons M_1, M_2 deux maxima de A, c'est-à-dire que :

$$M_1, M_2 \in A \text{ et } \forall a \in A,\ a \leq M_1 \text{ et } a \leq M_2.$$

Comme $M_1 \in A$ et que M_2 est un majorant de A, alors : $M_1 \leq M_2$.
Comme $M_2 \in A$ et que M_1 est un majorant de A, alors : $M_2 \leq M_1$.
Par antisymétrie, on déduit que : $M_1 = M_2$, ce qui assure l'unicité.
Le cas du minimum se montre de même. □

Remarque I.5. *On a donc l'unicité, mais seulement sous réserve d'existence. Et l'existence n'est pas toujours assurée.*

Théorème I.6. *L'existence d'un maximum ou d'un minimum est assuré dans les cas suivants :*

1. *toute partie **finie non vide** de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum ;*
2. *toute partie **non vide** de $\mathbb{N}$ admet un minimum ;*
3. *toute partie **non vide minorée** de $\mathbb{Z}$ admet un minimum ;*
4. *toute partie **non vide majorée** de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$ admet un maximum.*

Remarque I.7. *Dans les autres cas, il faudra toujours justifier l'existence d'un maximum ou d'un minimum pour pouvoir le manipuler.*

Exemple I.8. *Considérons l'ensemble $A = [-1; 1[$. Alors $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$ et donc :*

1. *A possède -1 comme minimum : c'est bien un élément de A et un minorant de A ;*
2. *A ne possède pas de maximum : par l'absurde, supposons que $a \in A$ soit un majorant de A. Comme $a \in A$, alors $-1 \leq a < 1$, et donc $0 \leq \frac{a+1}{2} < 1$, donc $b = \frac{a+1}{2} \in A$.*
   Par définition de b, on a :
   $$b = \frac{a+1}{2} > \frac{a+a}{2} = a.$$
   Mais comme a est un majorant de A et que $b \in A$, alors on a aussi : $b \leq a$.
   Et finalement :
   $$b \leq a < b$$
   d'où la contradiction.

II Théorème de la borne supérieure

Définition II.1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que :*

1. *un réel M est la **borne supérieure** de A si M est le plus petit majorant de A ; on note alors $M = \sup(A)$;*
2. *un réel m est la **borne inférieure** de A si m est le plus grand minorant de A ; on note alors $m = \inf(A)$.*

Par convention, on posera $\sup(A) = +\infty$ (resp. $\inf(A) = -\infty$) si A n'est pas majorée (resp. minorée).

Remarque II.2. *Une autre manière de formuler ces définitions est de dire que, en notant $\mathrm{Major}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A\, a \leq x\}$ et $\mathrm{Minor}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A\, a \geq x\}$ respectivement les ensembles des majorants et des minorants de A, alors :*

$$\sup(A) = \min(\mathrm{Major}(A)) \text{ et } \inf(A) = \max(\mathrm{Minor}(A))$$

ce qui met en évidence un point subtile : une borne supérieure ou inférieure n'existe pas toujours.

Proposition II.3. *Si A possède un maximum (resp. un minimum), alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure), et alors : $\sup(A) = \max(A)$ (resp. $\inf(A) = \min(A)$).*

Démonstration. Soit $a = \max(A)$. Donc a est un majorant de A et $a \in A$. Si M est un majorant de A, comme $a \in A$, alors : $a \leq M$. Donc a est bien le plus petit majorant : donc $\sup(A)$ existe, et $\sup(A) = \max(A)$. □

Exemple II.4. *Reprenons l'ensemble $A = [-1; 1[$. On a déjà vu que A possède un minimum, à savoir -1, qui est donc sa borne supérieure.*
L'ensemble des majorants de A est $\text{Major}(A) = [1; +\infty[$, qui admet 1 comme minimum. Et donc 1 est le plus petit des majorants de A : $\sup(A) = 1$.

Corollaire II.5. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$:*

1. *si A possède un minimum, alors :*
   (a) *$x \leq \min(A)$ si, et seulement si : $\forall a \in A,\ x \leq a$;*
   (b) *$x \geq \min(A)$ si, et seulement si : $\exists a \in A,\ x \geq a$;*
2. *si A possède un maximum, alors :*
   (a) *$x \geq \max(A)$ si, et seulement si : $\forall a \in A,\ x \geq a$;*
   (b) *$x \leq \max(A)$ si, et seulement si : $\exists a \in A,\ x \leq a$;*

Démonstration. Comme le minimum est la borne inférieure, c'est le plus grand des minorants ce qui donne le premier résultat car $x \leq \min(A)$ si, et seulement si, c'est un minorant de A.
Le deuxième point se montre par double implication :
— si $x \geq \min(A)$: alors $a = \min(A)$ convient ;
— si $x \geq a$ pour un $a \in A$: comme $\min(A)$ est un minorant, on a $x \geq a \geq \min(A)$.
D'où l'équivalence.
Le cas des maxima se montre de même. □

Proposition II.6. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Alors :*

$a = \inf[a,b] = \inf]a,b] = \inf[a,b[= \inf]a,b[= \inf[a,+\infty[= \inf]a,+\infty[$ *et* $b = \sup[a,b] = \sup]a,b] = \sup[a,b[= \sup$

Démonstration. On prend A l'un des intervalles considérés. Peu importe le choix de A, on a :

$$\text{Major}(A) = [b : +\infty[\text{ et } \text{Minor}(A) =]-\infty; a]$$

ce qui donne bien le résultat. □

Théorème II.7 (de la borne supérieure)**.**

1. *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*
2. *Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Démonstration. Admis : c'est en fait une manière de définir $\mathbb{R}$. □

Exemples II.8.
1. *$A =]0; 1]$ est non vide (il contient 1), majoré (par 2) et minoré (par -41) ; $\sup(A) = 1$ et $\inf(A) = 0$;*
2. *$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$ vérifie $\sup(B) = \sqrt{2}$ et $\inf(B) = -\sqrt{2}$;*
3. *$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ vérifie aussi $\sup(C) = \sqrt{2}$ et $\inf(C) = -\sqrt{2}$.*

Remarque II.9. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas le théorème de la borne supérieure.*
Posons $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$: alors A est non vide et majorée, mais n'admet pas de borne supérieure (dans $\mathbb{Q}$).
On a déjà que A est une partie non vide (car $1 \in A$) et majorée (par exemple par 2 car $x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x \notin A$).
Montrons que A n'a pas de borne supérieure. Soit $a \in \mathbb{Q}$ un majorant de A (dans $\mathbb{Q}$) : montrons qu'il ne peut pas être le plus petit. Pour cela, on pose $b = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{a}$:
— *comme $1 \in A$, alors $a \geq 1$ donc $b \geq 0$;*
— *on a $b^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2} + 1 = 2 + \left(\frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2} - 1\right) = 2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{a}\right)^2 \geq 2$, donc $b \geq \sqrt{2}$ est un majorant de A ;*

— $\left(\frac{2}{b}\right)^2 = \frac{4}{b^2} \leq 2$ *donc* $\frac{2}{b} \in A$ *; donc* $a \geq \frac{2}{b}$*, c'est-à-dire* $ab \geq 2$*.*
— *en remplaçant b par sa valeur, on déduit que* $a^2 \geq 2$*, donc* $a > \sqrt{2}$ *(car* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$*) ;*
— *et donc* $b - a = \frac{1}{a} - \frac{a}{2} = \frac{2-a^2}{2a} < 0$*, donc* $b < a$*.*

Donc, peu importe le majorant choisi, on peut toujours trouver un majorant strictement plus petit : A n'a pas de borne supérieure.

Proposition II.10. *Soient* A, B *deux parties non vides de* $\mathbb{R}$ *avec* $A \subset B$*. Alors :*

1. *si B possède une borne supérieure, alors A aussi et :* $\sup(A) \leq \sup(B)$ *;*
2. *si B possède une borne inférieure, alors A aussi et :* $\inf(A) \geq \sup(B)$*.*

Démonstration. Montrons le premier point.
Par définition, $M = \sup(B)$ est un majorant de B. Donc : $\forall b \in B,\ b \leq M$.
Mais $A \subset B$, donc : $\forall a \in A,\ a \in B$ donc $a \leq M$.
Donc M est un majorant de A. Donc A est non vide majorée : elle admet une bonne supérieure, qui en tant que plus petit majorant est inférieure ou égale à M. Donc : $\sup(A) \leq \sup(B)$. □

Corollaire II.11. *Soient* A, B *deux parties non vides de* $\mathbb{R}$ *qui s'intersectent. Alors :*

1. *si A ou B admet une borne supérieure, alors* $A \cap B$ *aussi et :* $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$ *;*
2. *si A ou B admet une borne inférieure, alors* $A \cap B$ *aussi et :* $\inf(A \cap B) \geq \max(\sup(A), \sup(B))$*.*

Démonstration. Découle des inclusions $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$. □

Remarque II.12. *On a seulement une inégalité. Par exemple, prenons* $A = \{-1, 0, 1\}$ *et* $B = \{-2, 0, 2\}$*, de sorte que* $A \cap B = \{0\}$*.*
Et donc :
— $\sup(A \cap B) = 0$ *et* $\min(\sup(A), \sup(B)) = \min(1, 2) = 1$ *;*
— $\inf(A \cap B) = 0$ *et* $\max(\inf(A), \inf(B)) = \min(-1, -2) = -1$*.*

Proposition II.13. *Soient* A, B *deux parties non vides de* $\mathbb{R}$*. Alors :*

1. $A \cup B$ *admet une borne supérieure si, et seulement si, A et B également, et alors :* $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$ *;*
2. $A \cup B$ *admet une borne inférieure si, et seulement si, A et B également, et alors :* $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$ *;*

Démonstration. Notons déjà que, si $A \cup B$ admet une borne inférieure ou supérieure, il en est de même pour A et B par les inclusions $A \subset A \cup B$ et $B \subset B \cup A$.
Supposons que A et B admettent des bornes supérieures. Notons $M_1 = \sup(A)$ et $M_2 = \sup(B)$, avec $M_1 \geq M_2$ (quitte à échanger A et B, ce qui ne change rien pour $A \cup B$), si bien que $M_1 = \max(M_1, M_2)$:
— soit $x \in A \cup B$. Alors : ou bien $x \in A$, et alors $x \leq M_1$, ou bien $x \in B$, et alors $x \leq M_2 \leq M_1$. Dans les deux cas on a bien $x \leq M_1$, donc M_1 est un majorant de $A \cup B$; et donc $A \cup B$ est un ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure avec $\sup(A \cup B) \leq M_1$;
— comme A est inclus dans $A \cup B$, alors on a : $M_1 = \sup(A) \leq \sup(A \cup B)$;

et finalement $M_1 = \sup(A)$.
D'où le résultat.
Le cas des bornes inférieures se traite de même. □

Proposition II.14. *Soit A une partie non vide de* $\mathbb{R}$*. Alors :*

1. $M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, M - \varepsilon < a \leq M \end{cases}$ *;*
2. $m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, m \leq a < m + \varepsilon \end{cases}$ *;*

Démonstration. Montrons le premier résultat :
- si $M = \sup A$:
  - M est un majorant de A (par définition) ;
  - si $\varepsilon > 0$, alors $M - \varepsilon < M$ donc $M - \varepsilon$ n'est plus un majorant de A. Donc il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a$. Donc $M - \varepsilon < a \leq M$.
- réciproquement : soit $M' < M$. Posons $\varepsilon = M - M' > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $M' < a$, donc M' n'est pas un majorant de A. Donc M est le plus petit majorant de A et $M = \sup A$.

□

Remarque II.15. *Le point clef des démonstrations est que la borne supérieure est le plus petit majorant : tout nombre strictement plus petit n'est plus un majorant, tandis que tout majorant est nécessairement plus grand.*

Théorème II.16. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est* ***archimédien****, c'est-à-dire que :*

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ na \geq b.$$

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Par l'absurde, supposons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ na < b$.
Alors l'ensemble $A = \{na,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc possède une borne supérieure M.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $(n+1) \in \mathbb{N}$, donc $(n+1)a \in A$, donc : $(n+1)a \leq M$. Et finalement : $na \leq M - a$, donc $M - a$ est un autre majorant de A.
Ceci contredit le fait que M est la borne supérieure de A. □

Théorème-Définition II.17. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle* ***partie entière*** *de x, notée $\lfloor x \rfloor$, l'unique entier relatif n tel que : $n \leq x < n+1$.*

Démonstration.
1. unicité : supposons que $n, n' \in \mathbb{Z}$ conviennent, c'est-à-dire tels que :
$$\begin{cases} n & \leq x < & n+1 \\ n' & \leq x < & n'+1 \end{cases}.$$
Alors : $\begin{cases} n & < & n'+1 \\ n' & < & n+1 \end{cases}$ et donc $-1 < n - n' < 1$.
Mais $n - n'$ est un entier, donc $n - n' = 0$, donc $n = n'$.
2. existence : posons $A = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq x\}$, qui est une partie de $\mathbb{Z}$ majorée (par x) et non vide car :
   - si $x \geq 0$: alors $0 \in A$;
   - si $x < 0$: comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \times 1 \geq -x$, et alors $-n \in A$.

   Ainsi, A possède un plus grand élément, que l'on note n, et qui vérifie :
   - comme $n \in A$: $n \leq x$;
   - comme $n + 1 \notin A$: $x < n+1$.

   Et donc n convient.

□

Remarque II.18. *Il sera parfois plus judicieux d'utiliser que la partie entière de x est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - 1 < n \leq x$.*

Théorème-Définition II.19 (Division euclidienne)**.** *Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$:*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists!(q,r) \in \mathbb{Z} \times [0; y[,\ x = qy + r.$$

Cette écriture est appelée ***division euclidienne*** *de x par y. On appelle r le* ***reste*** *et q le* ***quotient****.*

Démonstration. Découle des propriétés de la partie entière appliquées à $\dfrac{x}{y}$. □

Remarque II.20. *La partie entière n'est autre que le quotient de la division euclidienne par* 1.

Proposition-Définition II.21 (Approximation décimale)**.** *Si* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *on appelle* ***approximation décimale*** *de* x *à* 10^{-n} *le décimal :* $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.
On a : $x_n \leq x < x_n + \dfrac{1}{10^n}$.

Démonstration. Découle des propriétés de la partie entière. □

Remarque II.22. *Plus précisément,* x_n *est l'approximation de* x ***par défaut****. Et* $x_n + \dfrac{1}{10^n}$ *est appelée approximation* ***par excès****.*

III La droite achevée

Définition III.1. *On appelle* ***droite achevée****, notée* $\overline{\mathbb{R}}$, *l'ensemble :* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\} = [-\infty; +\infty]$.
On prolonge l'ordre sur $\mathbb{R}$ *à* $\overline{\mathbb{R}}$ *en posant :* $\forall x \in \overline{\mathbb{R}},\ -\infty \leq x \leq +\infty$.
On prolonge les opérations usuelles de $\mathbb{R}$ *à* $\overline{\mathbb{R}}$ *en posant :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$: $x + (-\infty) = -\infty$ *et* $x + (+\infty) = +\infty$;
2. $-\infty + (-\infty) = -\infty$ *et* $+\infty + (+\infty) = +\infty$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $x \times (+\infty) = +\infty$ *et* $x \times (-\infty) = -\infty$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$: $x \times (+\infty) = -\infty$ *et* $x \times (-\infty) = +\infty$;
5. $+\infty \times (+\infty) = -\infty \times (-\infty) = +\infty$ *et* $+\infty \times (-\infty) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$;
6. $\forall x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$;
7. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}},\ x \neq 0$: $\left|\dfrac{x}{0}\right| = \infty$.

Remarque III.2. *Les autres opérations, comme* $+\infty + (-\infty)$ *ou* $0 \times \pm\infty$ *sont des* ***formes indéterminées*** *: elles ne sont pas bien définies.*

Proposition III.3. *Tout intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *est de la forme* $]a; b[$, $]a; b]$, $[a; b[$ *ou* $[a; b]$ *pour* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Et dans ce cas, si ces quantités sont définies, on a : $\sup(I) = b$ *et* $\inf(I) = a$.

Démonstration. Par disjonction de cas, selon les différentes formes d'intervalle. □

Chapitre 13

Suites numériques

I Généralités

Dans cette partie $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

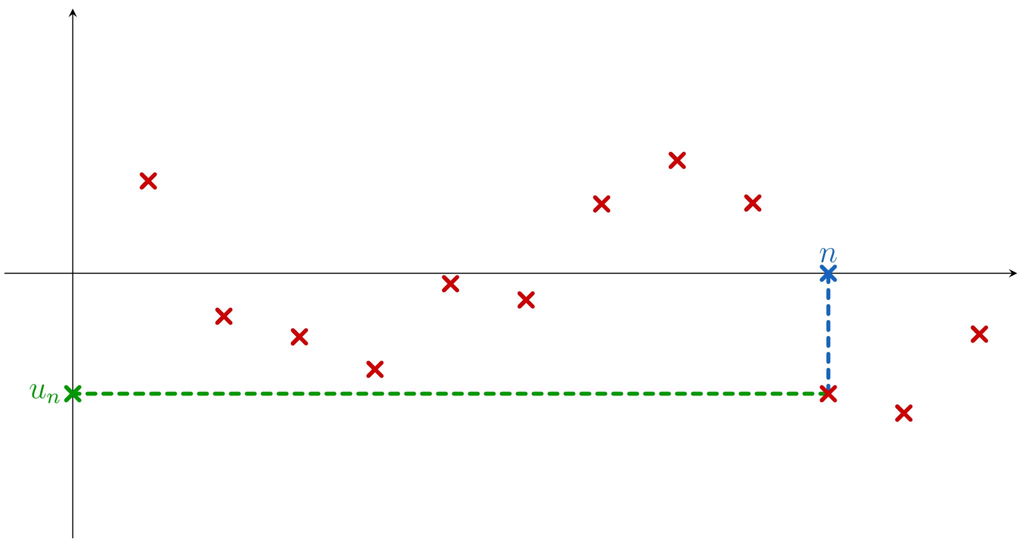
Définition I.1. *On appelle* ***suite numérique*** *une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$.*
On notera plus simplement u ou (u_n) la suite, et u_n est le ***terme général*** *de u.*

Remarques I.2.

1. *On pourra indexer une suite par $\mathbb{N}$ privé de ses premiers éléments. Par exemple, une suite indexée par $\mathbb{N} \setminus [\![0; n_0[\![$ sera notée : $(u_n)_{n\geq n_0}$.*
2. *On parlera de* ***suite réelle*** *lorsque $=\mathbb{R}$.*

Exemples I.3. *Une suite peut être définie de différentes manières :*
- ***explicite***, *avec une formule : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + 3n + 1$;*
- ***implicite*** *: $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution positive de l'équation $x^n + nx - 1 = 0$;*
- ***par récurrence*** *: $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.*

Remarque I.4. *On peut voir une suite comme une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, et la représenter comme telle :*



Définition I.5. *Si u, v sont deux suites numériques et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les suites $u + v$, λu et $u \times v$ par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{rcl} (u+v)_n & = & u_n + v_n \\ (\lambda u)_n & = & \lambda u_n \\ (u \times v)_n & = & u_n \times v_n \end{array} \right. .$$

Définition I.6. *Les indices $n \in \mathbb{N}$ sont appelés les **rangs** de la suite.*
*On dira qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété **à partir d'un certain rang** s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ vérifie cette propriété.*

Exemple I.7. *La suite $(u_n) = (n!)$ est paire à partir du rang 2.*

Définition I.8. *On dira qu'une suite u est **constante** si elle ne prend qu'une seule valeur.*
*On dira qu'une suite est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.*

Définition I.9. *On dira qu'une suite réelle u est :*
- ***majorée** s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$;*
- ***minorée** s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$;*
- ***bornée** si elle est majorée et minorée.*

Remarque I.10. *Il faut bien faire attention à ce que les majorants ou minorants **ne dépendent pas** de n.*

Proposition I.11. *La suite (u_n) est bornée si, et seulement si,la suite $(|u_n|)$ est majorée.*

Démonstration. Comme pour les fonctions. □

Définition I.12. *On dira qu'une suite réelle u est :*
1. ***croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$;*
2. ***décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$;*
3. ***strictement croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$;*
4. ***strictement décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.*

*Dans les deux premiers cas, u sera dite **monotone**, et **strictement monotone dans les autres cas**.*

Remarque I.13. *En pratique, pour étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de la suite $(u_{n+1} - u_n)$. Si la suite (u_n) est de signe constant, on peut aussi étudier la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ (en faisant attention au signe de u_n).*

Exemple I.14. *Étudions la monotonie de la suite : $(u_n) = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$.*
La suite (u_n) a tous ses termes strictement positifs. Et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+2}{n+3}}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)} = \frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3} > 1$$

et ainsi : $u_{n+1} > u_n$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Définition I.15. *Un suite (u_n) est dite périodique s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+N} = u_n.$$

Proposition I.16. *Une suite périodique (ou périodique à partir d'un certain) ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}$, on écrit $n = Nq + r$ la division euclidienne de n par N. Alors $u_n = u_r \in \{u_0, \dots, u_{N-1}\}$.
Le cas général en découle en rajoutant les premières valeurs de la suite. □

Remarque I.17. *De fait, les suites périodiques ne présentent pas un grand intérêt...*

II Limite d'une suite réelle

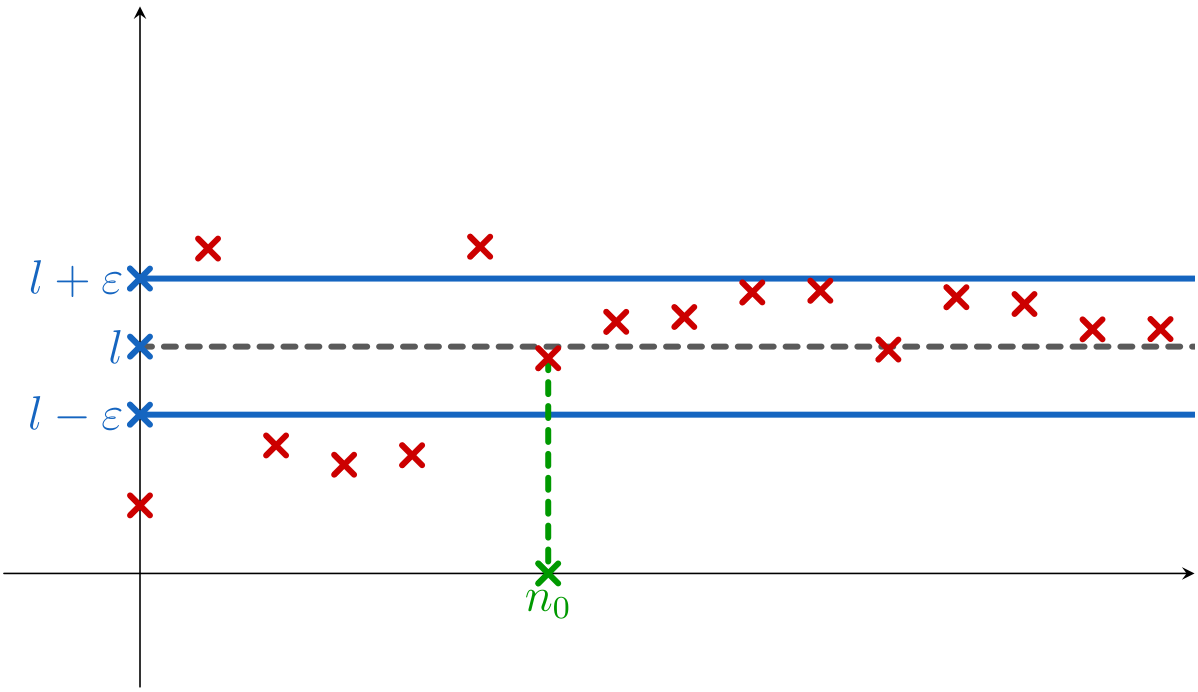
II.1 Limites finies ou infinies

Définition II.1. *Si (u_n) est une suite réelle, et $l \in \mathbb{R}$, on dit que la suite (u_n)* ***converge vers*** *l si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

On écrira alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ (ou plus simplement $\lim u_n = l$) ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$.
Plus généralement, on dira que la suite (u_n) est ***convergente*** *si elle converge vers un réel l, et* ***divergente*** *sinon.*

Remarque II.2. *Cela revient à dire que : pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[l - \varepsilon; l + \varepsilon]$ contient tous les termes de la suites à partir d'un certain rang.*



Remarques II.3.

1. *En pratique, on montre souvent que la suite $(|u_n - l|)$ converge vers 0.*
2. *Toute la subtilité sera de trouver les bons ε, en étant sûr que $\varepsilon > 0$, ou de trouver un n_0 convenable.*

Exemples II.4.

1. *Toute suite stationnaire est convergente : sa limite est sa valeur asymptotique.*
Soit (u_n) une telle suite. Notons $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante de valeur α.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n = \alpha \Rightarrow |u_n - \alpha| = 0 < \varepsilon$$
ce qui prouve bien la convergence vers α.
2. *Montrons que la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ converge vers 0 :*
Soit $\varepsilon > 0$. Alors $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ convient car $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ et :
$$n \geq n_0 \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| \leq \varepsilon.$$

Proposition II.5 (unicité de la limite)**.** *Si une suite converge, alors sa limite est unique.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que la suite (u_n) converge simultanément vers $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ avec $l_1 \neq l_2$.
Posons $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{3}$ et utilisons la définition de la limite :
— il existe n_1 tel que : $n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \varepsilon$;
— il existe n_2 tel que : $n \geq n_2 \Rightarrow |u_n - l_2| \leq \varepsilon$.
Posons $N = n_1 + n_2$. Alors $N \geq n_1$ et $N \geq n_2$. Mais par inégalité triangulaire :

$$3\varepsilon = |l_1 - l_2| = |l_1 - u_N + u_N - l_2| \leq |l_1 - u_N| + |l_2 - u_N| \leq 2\varepsilon$$

d'où la contradiction.
Donc $l_1 = l_2$. □

Proposition II.6. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente de limite l. Avec $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq 1$. Et donc :

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| \leq 1 + |l|.$$

Donc $M = \max\{1 + |l|, |u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|\}$ est un majorant de $(|u_n|)$: la suite (u_n) est donc bornée.
Le point important dans la preuve est que M existe bien car tout ensemble fini de réels admet un maximum.
□

Remarques II.7.

1. *La réciproque est évidemment fausse : la suite $(u_n) = (-1)^n$ est bornée mais ne converge pas.*
2. *L'idée de la preuve est qu'une suite est bornée si elle l'est à partir d'un certain rang ; et c'est clairement le cas pour une suite convergente.*

Proposition II.8. *Si (u_n) converge vers $l \neq 0$, alors tous les termes sont du signe de l (et ne s'annulent pas) à partir d'un certain rang.*

Démonstration. On utilise $\varepsilon = \dfrac{|l|}{2}$. À partir d'un certain rang, les termes sont dans $\left[\dfrac{l}{2}; \dfrac{3l}{2}\right]$ ou $\left[\dfrac{3l}{2}; \dfrac{l}{2}\right]$ selon le signe de l. □

Remarques II.9.

1. *On utilisera plutôt que, si u converge vers $l > 0$, alors u est strictement positive à partir d'un certain rang.*
2. *Le résultat montré est plus fort en fait : si $l > 0$, alors il existe $m > 0$ tel que u est minorée par m à partir d'un certain rang ; si $l < 0$, il existe $M < 0$ tel que u est majorée par M à partir d'un certain rang. Ce résultat est plus fort dans le sens où la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est ainsi bornée.*

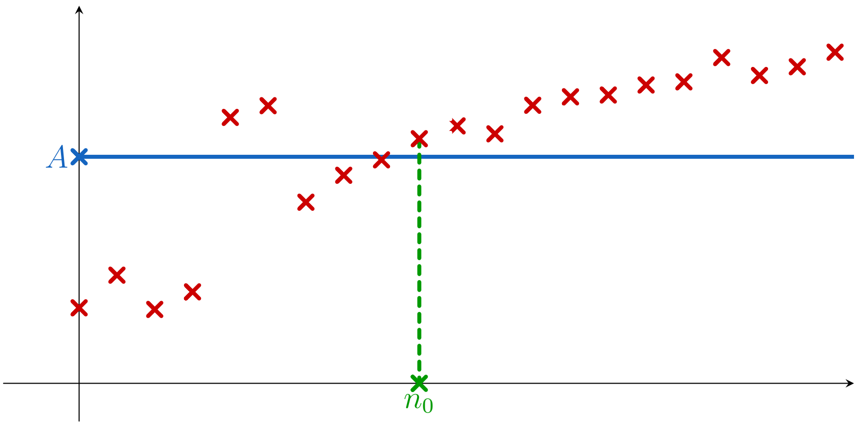
Définition II.10. *On dit qu'une suite réelle (u_n) **tend vers** $+\infty$ si :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A.$$

On écrira alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (ou plus simplement $\lim u_n = +\infty$) ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$.
*De même, on dit qu'une suite (u_n) **tend vers** $-\infty$ si :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A.$$

et on utilisera les notations idoines.



Exemple II.11. *Montrons que la suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$:*
Soit $A \in \mathbb{R}$. Alors $n_0 = \lfloor A^2 \rfloor + 1$ convient car $n_0 > A^2$ et ainsi :

$$n \geq n_0 \Rightarrow n \geq A^2 \Rightarrow \sqrt{n} \geq \sqrt{A^2} = |A| \geq A.$$

Proposition II.12. *Soit (u_n) une suite réelle :*

1. *si (u_n) tend vers $+\infty$: alors elle est minorée, et elle n'est pas majorée ;*
2. *si (u_n) tend vers $-\infty$: alors elle est majorée, et elle n'est pas minorée.*

Démonstration. Le fait de ne pas être majorée ou minorée découle de la définition.
Montrons qu'une suite qui tend vers $+\infty$ est minorée. Prenons la définition avec $A = 0$. Il existe n_0 tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq 0$. Donc (u_n) est minorée par : $m = \min\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, 0\}$. □

Corollaire II.13. *Une suite ayant une limite est majorée ou minorée.*

Démonstration. Par disjonction de cas suivant que la limite est finie ou non. □

II.2 Opérations sur les limites

Théorème II.14. *Si u, v sont deux suites réelles avec $\lim u = l$ et $\lim v = l'$ (pour $l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$), et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors, sous réserve que les quantités ci-dessous soient bien définies :*

1. *la suite $(u + v)$ a pour limite $l + l'$;*
2. *la suite (λu) a pour limite λl ;*
3. *la suite (uv) a pour limite $l \times l'$;*
4. *si $l' \neq 0$, la suite $\frac{u}{v}$ est bien définie à partir d'un certain rang, et a pour limite $\frac{l}{l'}$.*

Remarque II.15. *Il faudra bien prendre garde aux* ***formes indéterminées*** *(les opérations interdites dans $\overline{\mathbb{R}}$). Par exemple, si $l = +\infty$ et $l' = -\infty$, la suite $w = u + v$ peut avoir tout type de comportement :*
- *si $(u_n) = n$ et $(v_n) = -n$: w est stationnaire ;*
- *si $(u_n) = 2n$ et $(v_n) = -n$: w tend vers $+\infty$;*
- *si $(u_n) = n$ et $(v_n) = -2n$: w tend vers $-\infty$;*
- *si $(u_n) = n$ et $(v_n) = (-1)^n - n$: w n'a même pas de limite.*

Démonstration (de quelques cas) :

1. notons que $l + l'$ est bien défini à moins que $l = \pm\infty$ et $l' = -l$:

— si $l, l' \in \mathbb{R}$: on veut montrer que $(u+v)$ converge vers $l+l' \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Si $n \in \mathbb{N}$:

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'|.$$

On applique les définitions des limites pour u et v avec $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$\begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

et ainsi, en posant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $(u+v)$ tend bien vers $(l+l')$.

— si $l = +\infty$ et $l' \neq -\infty$: alors u tend vers $+\infty$, et v est nécessairement minorée (elle est soit convergente, soit elle tend vers $+\infty$). Donc $u+v$ tend bien vers $l+l' = +\infty$ d'après la proposition suivante.

— si $l = -\infty$ et $l' \neq +\infty$: même constat.

2. la seule forme indéterminée est serait $\lambda = 0$ et $l = \pm\infty$, mais en fait λu serait la suite stationnaire (de valeur 0), qui converge vers 0. On considère donc $\lambda \neq 0$:

— si $l \in \mathbb{R}$: on veut montrer que (λu) converge vers $\lambda l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Si $n \in \mathbb{N}$:

$$|\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda| \times |u_n - l|.$$

On applique la définition de la limite de u à $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$, donc il existe n_0 tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$.

Et donc : $n \geq n_0 \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda l| < \varepsilon$. Donc (λu) tend bien vers λl.

— si $l = +\infty$: on veut montrer que (λu) converge vers $\lambda l = \text{signe}(\lambda)\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. On applique la définition de la limite de u à $\frac{A}{\lambda}$, donc il existe n_0 tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq \frac{A}{\lambda}$. Et donc :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda u_n \geq A & \text{si} \quad \lambda > 0 \\ \lambda u_n \leq A & \text{si} \quad \lambda < 0 \end{cases}.$$

donc λu tend bien vers $\lambda l = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \lambda > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \lambda < 0 \end{cases}$.

3. les formes indéterminées sont si $l = \pm\infty$ et $l' = 0$ (ou l'inverse) :

— si $l, l' \in \mathbb{R}$: on veut montrer que (uv) converge vers $ll' \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Si $n \in \mathbb{N}$:

$$|(u_n v_n) - (ll')| = |u_n v_n - l v_n + l v_n - ll'| = |(u_n - l)v_n + l(v_n - l')| \leq |v_n||u_n - l| + |l||v_n - l'|.$$

Comme v est convergente, alors elle est bornée, et il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq M$. Posons $a = \max(M, |l|, 1) > 0$.

On applique la définition des limites de u et v à $\frac{\varepsilon}{2a} > 0$:

$$\begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2a} \\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2a} \end{cases}$$

En prenant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$|u_n v_n - ll'| \leq a\frac{\varepsilon}{2a} + a\frac{\varepsilon}{2a} = \varepsilon.$$

Donc (uv) converge bien vers ll'.

— pour les autres cas : on aura toujours une des suites qui tend vers $\pm\infty$ et l'autre qui est minorée par un nombre strictement positif ou majorée par un nombre strictement négatif à partir d'un certain rang. Donc le résultat découle d'une proposition suivante.

4. grâce à la limite d'un produit, il suffit de montrer que $\frac{1}{u}$ tend vers $\frac{1}{l}$:
   — si $l \in \mathbb{R}^*$: on veut montrer que $\frac{1}{u}$ converge vers $\frac{1}{l} \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $l \neq 0$, il existe un rang n_1 tel que : $n \geq n_1 \Rightarrow |u_n| \geq \frac{|l|}{2} > 0$, ce qui assure déjà que u est bien définie à partir d'un certain rang.
   Si $n \geq n_1$, on a :
   $$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{l-u_n}{lu_n}\right| \leq 2\frac{|u_n - l|}{l^2}.$$
   On applique la définition de la limite de u à $\varepsilon\frac{l^2}{2}$ donc il existe n_2 tel que : $n \geq n_2 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\frac{l^2}{2}$.
   D'où, avec $n_0 = \max(n_1, n_2)$:
   $$\forall n \geq n_0, \ \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| \leq \varepsilon.$$
   Donc $\frac{1}{u}$ converge vers $\frac{1}{l}$.
   — si $l = +\infty$: on veut montrer que $\frac{1}{u}$ converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.
   On applique la définition de la limite de u à $A = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Il existe un rang n_0 tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Ce qui assure que u est bien définie à partir d'un certain rang.
   Et donc :
   $$n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n} \leq \varepsilon.$$
   Donc $\frac{1}{u}$ tend bien vers 0.

□

Remarque II.16. *Une autre manière de dire est que les limites se comportent bien avec les opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$: la limite d'une somme est la somme des limites, la limite d'un produit est le produit des limites, etc.*

Proposition II.17 (Limites d'autres sommes)**.** *Si u, v sont deux suites réelles :*

1. *si u est minorée et que v tend vers $+\infty$, alors $u + v$ tend vers $+\infty$;*
2. *si u est majorée et que v tend vers $-\infty$, alors $u + v$ tend vers $-\infty$.*

Démonstration. Montrons le premier cas. Soit m un minorant de u, donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq m$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. On applique la définition de la limite de v avec $A - m$, donc il existe n_0 tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow v_n \geq A - m$.
Et donc : $\forall n \geq n_0, \ (u_n + v_n) \geq m + (A - m) = A$.
Donc $(u + v)$ tend vers $+\infty$. □

Proposition II.18 (Limites d'autres produits)**.** *Si u, v sont deux suites réelles :*

1. *si u est bornée et que v converge vers 0, alors uv converge vers 0 ;*
2. *si u est minorée par $m > 0$ à partir d'un certain rang et que v tend vers $\pm\infty$, alors uv a même limite que v ;*
3. *si u est majorée par $M < 0$ à partir d'un certain rang et que v tend vers $\pm\infty$, alors uv a une limite opposée à celle de v.*

Démonstration. 1. notons $M > 0$ un majorant de $|u|$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq M$.
Soit $\varepsilon > 0$. On applique la définition de la limite de v avec $\frac{\varepsilon}{M} > 0$, donc il existe n_0 tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$.
Et donc : $\forall n \geq n_0, \ |u_n v_n| = |u_n| \cdot |v_n| \leq \varepsilon$.
Donc (uv) converge bien vers 0.

2. si $\lim v = +\infty$: soit $A > 0$. Notons $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} \forall n \geq n_1,\ u_n \geq m > 0 \\ \forall n \geq n_2,\ v_n \geq \frac{|A|}{m} > 0 \end{cases}$$

   Et donc, avec $n = \max(n_1, n_2)$, on a :

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_n v_n \geq m v_n \geq m\frac{|A|}{m} = |A| \geq A$$

   donc uv tend bien vers $+\infty$.

3. idem.

□

Proposition II.19 (Limite de valeurs absolues)**.** *Si u a pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $|u|$ a pour limite $|l|$.*

Démonstration. — si $l \in \mathbb{R}$: alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$ (par inégalité triangulaire).
Si $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$.
Et donc : $n \geq n_0 \Rightarrow ||u_n| - |l|| \leq \varepsilon$, donc $|u|$ converge vers $|l|$.

— si $l = +\infty$: soit $A \in \mathbb{R}$. Par définition de la limite de u avec $|A|$, il existe n_0 tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq |A| \geq 0$.
Et donc : $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| = u_n \geq |A| \geq A$.

□

Remarque II.20. *La réciproque est fausse en générale (reprendre la suite $(u_n) = ((-1)^n)$). Elle est vraie si $l = 0$: $\lim u = 0 \Leftrightarrow \lim |u| = 0$.*

Proposition II.21 (Limites d'autres quotients)**.** *Si u est une suite réelle :*

1. *si u a tous ses termes strictement positifs à partir d'un certain rang et converge vers 0, alors $\dfrac{1}{u}$ tend vers $+\infty$;*

2. *si u a tous ses termes strictement négatifs à partir d'un certain rang et converge vers 0, alors $\dfrac{1}{u}$ tend vers $-\infty$.*

Démonstration. Montrons le premier cas.
Soit $A \in \mathbb{R}$.
Notons n_1 tel que : $n \geq n_1 \Rightarrow u_n > 0$.
Il existe n_2 tel que : $n \geq n_2 \Rightarrow |u_n| \leq \dfrac{1}{|A|+1}$.
Et donc, avec $n_0 = \max(n_1, n_2)$: $n \geq n_0 \Rightarrow 0 < u_n \leq |u_n| \leq \dfrac{1}{|A|+1} \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \geq |A| + 1 \geq A$.
Donc $\dfrac{1}{u}$ tend vers $+\infty$. □

Corollaire II.22. *Soit u une suite réelle qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang.*
Alors $|u|$ tend vers $+\infty$ si, et seulement si, $\dfrac{1}{u}$ converge vers 0.

Corollaire II.23. *Si u converge vers $l \neq 0$ et si v tend vers 0, alors la suite $\left|\frac{u}{v}\right|$ tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Il suffit de voir que $\frac{v}{u}$ tend vers 0. Mais, comme u tend vers $l \neq 0$, alors $\frac{1}{u}$ converge, donc est bornée. Donc $\frac{v}{u} = v \times \frac{1}{u}$ tend vers 0. □

III Limites et inégalités

III.1 Liens entre inégalités et limites

Proposition III.1. *Si u et v sont deux suites réelles convergentes telles que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$*, alors* $\lim u \leq \lim v$.
Si de plus : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$*, alors* $\lim u \leq \lim v$.

Démonstration. Notons $l = \lim u$ et $l' = \lim v$. Par opérations sur les limites :
- la suite $v - u$ converge vers $l' - l$;
- la suite $|v - u|$ converge vers $|l' - l|$.

Mais ces deux suites sont égales par l'inégalité. Par unicité de la limite, on déduit que : $|l' - l| = l' - l$. Et ainsi : $l' \geq l$. □

Remarques III.2.
1. *on ne peut pas avoir d'inégalité stricte en passant à la limite : par exemple prendre $u = 0$ (la suite nulle) et $(v_n) = (\frac{1}{n})$;*
2. *il suffit en fait d'avoir $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang ;*
3. *en pratique, on l'utilisera avec u ou v qui est une suite constante.*

Théorème III.3 (Théorème d'encadrement, ou des gendarmes)**.** *Si u, v, w sont des suites réelles telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si les suites u et w convergent vers une même limite l, alors v converge aussi vers l.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition des limites de u et w :

$$\begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon & \text{donc } l - \varepsilon \leq u_n \\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \Rightarrow |w_n - l| \leq \varepsilon & \text{donc } w_n \leq l + \varepsilon \end{cases}.$$

En posant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a :

$$n \geq n_0 \Rightarrow l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \varepsilon \text{ donc } |v_n - l| \leq \varepsilon$$

donc v_n converge vers l. □

Remarque III.4. *Il suffit en fait d'avoir l'inégalité à partir d'un certain rang.*

Exemples III.5.
1. *montrons que la suite $(u_n) = \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)$ tend vers 0.*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{-1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
   Les suites de terme général $\frac{-1}{n}$ et $\frac{1}{n}$ convergent vers 0, donc u converge vers 0 par encadrement.
2. *étudions la limite de la suite u de terme général : $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.*
   Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$: $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$.
   Donc en sommant pour k allant de 1 à n : $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$.
   Mais $\frac{n^2}{n^2+n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{1+0} = 1$ et $\frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to 1$: donc par encadrement u tend vers 1.

Proposition III.6 (Divergence par minoration ou majoration)**.** *Soient u, v deux suites réelles telles que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$*. Alors :*
1. *si u tend vers $+\infty$, alors v aussi ;*
2. *si v tend vers $-\infty$, alors u aussi.*

Démonstration. Montrons le premier cas. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que ; $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$. Et donc : $n \geq n_0 \Rightarrow v_n \geq A$. □

III.2 Suites monotones et suites adjacentes

Théorème III.7 (de la limite monotone)**.**

1. *Soit u une suite croissante :*
   - *si u est majorée : elle converge vers $\sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;*
   - *si u n'est pas majorée : alors u tend vers $+\infty$.*
2. *Soit u une suite décroissante :*
   - *si u est minorée : elle converge vers $\inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;*
   - *si u n'est pas minorée : alors u tend vers $-\infty$.*

Démonstration. Montrons pour une suite croissante.
- si u est majorée : notons $l = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, et prenons $\varepsilon > 0$.
  Par caractérisation de la borne supérieure, on déduit que : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $l - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq l$.
  Mais u est croissante et majorée par l, donc pour tout $n \geq n_0$: $u_{n_0} \leq u_n \leq l$.
  Et donc pour tout $n \geq n_0$: $l - \varepsilon \leq u_n \leq l$, donc $|u_n - l| \leq \varepsilon$.
- si u n'est pas majorée : soit $A \in \mathbb{R}$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geq A$ (sinon A serait un majorant de u).
  Par croissance, on a donc : $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq u_{n_0} \geq A$, donc u tend vers $+\infty$.

□

Exemple III.8. *Étudions la suite de terme général : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.*
- *u est croissante : si $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$;*
- *u est majorée par 2 : si $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Et ainsi :*

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ & \leq & 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ & \leq & 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2 \end{array}$$

Donc u converge, et sa limite l vérifie : $l \leq 2$. (en fait sa limite vaut $\frac{\pi^2}{6} \simeq 1.65$.

Remarque III.9. *Le majorant utilisé n'est pas toujours la limite de la suite.*

Corollaire III.10. *Toute suite réelle monotone a une limite (finie ou non).*

Théorème-Définition III.11. *Soient u, v deux suites réelles telles que :*

1. *u est croissante ;*
2. *v est décroissante ;*
3. $\lim (u_n - v_n) = 0$.

*Alors on dit que u et v sont **adjacentes**.*
Sous ces conditions, u et v convergent vers une même limite l, qui est l'unique réel vérifiant :

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ u_n \leq l \leq v_m.$$

Démonstration. Comme u est croissante et v est décroissante, alors la suite $u - v$ est croissante. Comme elle converge vers 0, on déduit que : 0 est un majorant de $u - v$, donc $u - v$ est toujours négative ou nulle.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.
En utilisant à nouveau les monotonies, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

donc :
- la suite u est croissante, majorée par v_0, donc converge vers un réel l ;

— la suite v est décroissante, minorée par u_0, donc converge vers un réel l' ;
— $\lim (u_n - v_n) = l' - l = 0$.

Donc u et v convergent toutes les deux vers l.
Par monotonies de u et v, on a :

$$\sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} = l = \inf\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ce qui justifie déjà que : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ u_n \leq l \leq v_m$.
Si l' vérifie les mêmes inégalités, alors :
— l' est un majorant de u, donc : $l \leq l'$;
— l' est un minorant de v, donc : $l' \leq l$.

Donc $l = l'$, ce qui assure l'unicité. □

Remarque III.12. *On peut prouver plus rapidement la convergence de u et v vers une même limite :*
— *u est croissante donc a une limite $l_1 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$;*
— *v est décroissante donc a une limite $l_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.*

Par opération sur les limites (pas de FI) on déduit que $u - v$ tend vers $l_1 - l_2$ et par unicité de la limite $l_1 = l2$, qui est donc nécessairement un réel.

Remarque III.13. *Si les suites u, v sont strictement monotones, on peut mettre des inégalités strictes à la fin.*

Exemple III.14. *Démonstration de l'irrationalité de e.*

1. *On considère les suites u, v définies par :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Alors :
— $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, *donc u est strictement croissante ;*
— $v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)((n+1)!)} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)((n+1)!)} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)((n+1)!)} = \frac{-1}{n(n+1)((n+1)!)} < 0$ *donc v est strictement décroissante ;*
— $\lim (u_n - v_n) = \lim \frac{1}{n \cdot n!} = 0$.

Donc u et v sont adjacentes : elles convergent vers une même limite l. On admet (voir chapitre plus tard) que $l = e$.

2. *Par l'absurde, supposons que e est rationnel : on écrit $e = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ (comme $l \geq u_0 > 0$).*
Par stricte monotonie, on a : $u_q < \frac{p}{q} < v_q = u_q + \frac{1}{q \cdot q!}$. Donc :

$$q \cdot q! \cdot u_q < p \cdot q! < q \cdot q! \cdot u_q + 1.$$

Mais $q! \cdot u_q \in \mathbb{N}$ (en regardant la formule). Donc $p \cdot q!$ serait un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est impossible.
Donc e est irrationnel.

IV Suites extraites

Définition IV.1. *Soient u une suite et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$, notée aussi u_φ, est appelée* ***suite extraite de*** *u. La fonction φ est appelée* ***fonction extractrice****.*

Exemples IV.2.

1. *les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont les suites extraites de u correspondant aux indices pairs et impairs ;*

2. la suite (u_{n+n_0}) correspond à la suite u privée de ses n_0 premiers termes.

Proposition IV.3. *Si u est (strictement) croissante (ou (strictement) décroissante, constante, stationnaire, majorée, minorée, bornée), alors toute suite extraite de u aussi.*

Démonstration. Découle de la monotonie d'une composée. □

Proposition IV.4. *Si u a pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de u a aussi pour limite l.*

Démonstration. Montrons le résultat lorsque u converge vers $l \in \mathbb{R}$.
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors on a le lemme suivant :

Lemme IV.5. $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$.

preuve du lemme. On procède par récurrence :
- $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, donc $\varphi(0) \geq 0$;
- supposons $\varphi(n) \geq n$. Alors, par monotonie : $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$, donc $\varphi(n+1) > n$, et finalement : $\varphi(n+1) \geq n+1$.

□

Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de u, il existe n_0 tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$.
Et donc par le lemme : $n \geq n_0 \Rightarrow \varphi(n) \geq \varphi(n_0) \geq n_0 \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$. □

Remarque IV.6. *En pratique, on utilise plutôt la contraposée pour montrer qu'une suite n'a pas de limite :*
- *soit en exhibant une suite extraite qui n'a pas de limite ;*
- *soit en exhibant deux suites extraites qui ont des limites différentes.*

Exemple IV.7. *La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ diverge car :*
- *la suite extraite (u_{2n}) est constante égale à 1, donc converge vers 1 ;*
- *la suite extraite (u_{2n+1}) est constante égale à -1, donc converge vers -1.*

Proposition IV.8. *Si u converge, alors la suite $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0.*

Démonstration. Notons l la limite de u. Alors (u_{n+1}) converge vers l. Donc $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers $l - l = 0$. □

Remarque IV.9. *La réciproque est fausse.*
On considère la suite définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On a pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$ qui tend vers 0. Mais u ne converge pas.
Par l'absurde, supposons qu'elle converge vers une limite l. Alors la suite extraite $(v_n) = (u_{2n})$ convergerait aussi vers l. Donc la suite $v - u$ convergerait vers 0.
Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et donc en passant à la limite : $0 \geq \frac{1}{2}$, d'où la contradiction.
Donc u ne converge pas. Au passage, comme elle est croissante, cela montre aussi qu'elle tend vers $+\infty$.

Proposition IV.10. *La suite u a pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si, et seulement si, les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) aussi.*

Démonstration. La première implication découle du fait que l'on a des suites extraites.
Réciproquement, supposons que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers $l \in \mathbb{R}$ (les cas $l = \pm\infty$ se traitent pareil).
Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_{2n} - l| \leq \varepsilon \\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Posons $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Alors si $n \geq n_0$:
- si n est pair : $n = 2m$ avec $m \geq n_1$, donc : $|u_n - l| = |u_{2m} - l| \leq \varepsilon$;
- si n est impair : $n = 2m + 1$ avec $m \geq n_2$, donc : $|u_n - l| = |u_{2m+1} - l| \leq \varepsilon$.

Donc u converge vers l. □