TD 0 : Nombres complexes

Ces exercices sont avant tout destinés à vous familiariser avec les nombres complexes si vous les découvrez. Nous vous conseillons de les chercher sérieusement, sans toutefois y passer un temps excessif.
Ne paniquez pas si certains exercices vous posent davantage de difficultés, vous pourrez toujours consulter les corrigés qui seront mis en ligne mi-août, et surtout vous n'hésiterez pas à venir poser des questions à votre professeur de mathématiques à la rentrée sur les points qui vous ont posé des difficultés.
Les nombres complexes feront l'objet d'un chapitre dans les semaines suivant la rentrée, au cours duquel vous aurez l'occasion de vous familiariser davantage avec les concepts et les méthodes présentés dans ces exercices.

Pour chaque exercice, sa difficulté est indiquée par le nombre d'étoiles figurant dans la marge. Traitez en priorité les exercices ★☆☆ *et* ★★☆ *et ne vous attaquez aux exercices* ★★★ *que si les autres vous ont paru abordables.*

▸ Calculs sous forme algébrique

Dans cette partie, on utilisera en priorité la forme algébrique d'un complexe : $z = a + ib$, avec a, b réels.

Exercice 1 Donner la forme algébrique des complexes suivants : ★☆☆

1. $z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3} + i}$
2. $z_2 = \dfrac{2 - \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - 2i}$
3. $z_3 = \dfrac{(2+i)(3+2i)}{2-i}$
4. $z_4 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes : ★☆☆

1. $iz + 3(z - i) = 0$
2. $(4 + i)z = 4 - z$
3. $\dfrac{z+1}{z-2} = 3i$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes : ★☆☆

1. $2z + 3\overline{z} = 4 - 3i$
2. $3z - 2\overline{z} = -5 + i$
3. $z^2 = z \times \overline{z}$

▸ Module d'un nombre complexe

Exercice 4 Montrer que pour tous nombres complexes z, z', on a $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$. ★★☆
On évitera le recours à la forme algébrique, et on exprimera le module d'un complexe à l'aide de son conjugué.

Exercice 5 Déterminer tous les nombres complexes $z \in \mathbf{C}^*$ tels que $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |1 + z|$. ★★★

▸ Forme exponentielle et trigonométrie

Dans cette partie, on privilégiera l'écriture d'un complexe (non nul) sous sa forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$.
Pour les exercices 6 et 7, on utilisera les valeurs remarquables des fonctions $\sin$ et $\cos$ en $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$, et on pourra utiliser avec profit un cercle trigonométrique.

Exercice 6 Déterminer un argument des nombres complexes suivants : ★☆☆

1. $z_1 = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
2. $z_2 = -7i$
3. $z_3 = -\dfrac{9\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9i}{2}$
4. $z_4 = -4\sqrt{23} + 4\sqrt{23}i$

Exercice 7 Déterminer la forme exponentielle des complexes suivants : ★☆☆

1. $z_1 = -3 - 3i$
2. $z_2 = \frac{3}{2}i - \frac{3\sqrt{3}}{2}$
3. $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $z_4 = \frac{7}{2} + i\frac{7\sqrt{3}}{2}$

Exercice 8 Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. ★★☆

1. Mettre j sous forme exponentielle.
2. Calculer j^2 et j^3, puis $1 + j + j^2$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(1+j)^{2n+1} = -j^{n+2}$.

Exercice 9 ★★★

1. Montrer que pour tout nombre réel θ, $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$.
2. En déduire des expressions de $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.
4. En déduire la forme exponentielle de $3\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right) + 3i\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$

Exercice 10 Soit $\omega = \sqrt{3} + i$. Déterminer tous les $n \in \mathbf{N}$ tels que $\omega^n \in \mathbf{R}$. Tels que $\omega^n \in \mathbf{R}_+$. ★★★

▸ Équations de degré 2

Exercice 11 Déterminer tous les nombres complexes z tels que $z^2 + 10z + 169 = 0$. ★☆☆

Exercice 12 Soit $\theta \in [0, \pi]$. ★★☆

1. En se ramenant à une équation polynomiale de degré 2, déterminer tous les complexes non nuls z tels que $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\theta)$.
2. En déduire que si $z \in \mathbf{C}^*$ vérifie $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\theta)$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$.

▸ Racines carrées d'un nombre complexe

Exercice 13 **Racines carrées d'un complexe non nul** ★★☆
Soit $\alpha = re^{i\theta}$ un complexe non nul sous forme exponentielle (donc avec $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbf{R}$).
Le but de l'exercice est de déterminer toutes les racines carrées de α, c'est-à-dire les solutions de l'équation (E_α) : $z^2 = \alpha$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

1. Prouver que $\alpha_1 = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ est une solution de (E_α).
2. À l'aide d'une identité remarquable, prouver que (E_α) possède exactement deux solutions que l'on déterminera sous forme exponentielle.
3. **Application** : déterminer les racines carrées de $z_1 = 2 - 2i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.
   On commencera par mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle, puis on utilisera ce qui précède.

Exercice 14 On considère l'équation du second degré à coefficients complexes (E) : $z^2 - (6+2i)z + 4 + 2i(2\sqrt{3}+3) = 0$. ★★★

1. Montrer que pour tout nombre complexe z, $z^2 - (6+2i)z = (z - (3+i))^2 - 8 - 6i$.
2. En déduire que (E) équivaut à $(z - (3+i))^2 = 4 - 4i\sqrt{3}$.
3. Déterminer toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.
   Indication : commencer par mettre $4 - 4i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle, puis utiliser l'exercice précédent.

▸ Pour aller plus loin

Ces exercices sont en priorité destinés à ceux qui ont déjà une certaine aisance avec les complexes et qui souhaiteraient aller plus loin. N'essayez pas de les faire si les précédents vous ont déjà demandé beaucoup de temps, vous aurez l'occasion de refaire des exercices similaires lorsque vous traiterez le chapitre de complexes en cours.

Exercice 15 Déterminer tous les complexes $z \in \mathbf{C}$ tels que $z^2 = \overline{z}$. ★★☆

Exercice 16 **Racines carrées sous forme algébrique** ★★☆
Soit $\alpha = A + iB$ un nombre complexe non nul sous forme algébrique, avec $A, B \in \mathbf{R}$.
Il a été prouvé à l'exercice 13 que α possède exactement deux racines carrées, c'est-à-dire des solutions de l'équation $z^2 = \alpha$.
Le but de cet exercice est de décrire une méthode pour obtenir ces racines carrées sous forme algébrique.
Soit $z = a + ib$ un complexe sous forme algébrique (donc avec $a, b \in \mathbf{R}$).

1. Montrer que $z^2 = \alpha$ si et seulement si a, b sont solutions du système suivant : $\begin{cases} a^2 - b^2 = A \\ 2ab = B \end{cases}$
2. En utilisant le module, prouver que si $z^2 = \alpha$, alors on a de plus $a^2 + b^2 = \sqrt{A^2 + B^2}$.
3. En déduire que si $z^2 = \alpha$, alors $a^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{A^2 + B^2} + A)$ et $b^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2 + B^2} - A\right)$.
4. Prouver également que si $z^2 = \alpha$, alors a et b sont de même signe si $B \geqslant 0$ et de signes opposés si $B < 0$.
5. **Application** : déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $-1 + i$ et de $-5 - 12i$.

Exercice 17 ★★★

1. Prouver que pour tous complexes a et b, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
2. Linéariser (c'est-à-dire écrire sous forme de somme de $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$, $k \in \mathbf{N}$) les expressions suivantes :

   (a) $\cos^4(x)$ (b) $\cos^3(x) + 2\sin^3(x)$ (c) $\cos^2(x)\sin^3(x)$

3. En déduire des primitives des fonctions correspondantes.

Exercice 18 Donner les nombres suivants sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique, où n est un entier naturel et $\theta \in \mathbf{R}$ ★★★

1. $z_1 = \left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^n$
2. $z_2 = \dfrac{(1 - i)^n - \sqrt{2}^n}{(1 + i)^n - \sqrt{2}^n}$
3. $z_3 = (1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta))^{2n}$
4. $z_4 = \dfrac{(1 + i)^n - (1 - i)^n}{i}$

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 0

SOLUTION DE L'EXERCICE 1

> **Méthode**
> Pour mettre un quotient sous forme algébrique, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

1. On a $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{9-i^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{10} - i\dfrac{\sqrt{3}}{10}$.
2. On a
$$z_2 = \frac{(2-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+2i)}{(\sqrt{3}-2i)(\sqrt{3}+2i)} = \frac{2\sqrt{2}-3i+4i-i^2 2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-4i^2} = \frac{4\sqrt{3}+i}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}+\frac{i}{7}.$$
3. On a cette fois
$$z_3 = \frac{(2+i)^2(3+2i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{(4+4i+i^2)(3+2i)}{4-i^2} = \frac{(3+4i)(3+2i)}{5}$$
$$= \frac{1+18i}{5} = \frac{1}{5}+i\frac{18}{5}.$$
4. On a
$$z_4 = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{1-3i^2} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2

Notons que la plupart de ces équations se ramènent à une équation du premier degré, de la forme $az+b=0$, qui se résout exactement comme dans $\mathbf{R}$: elle possède pour unique solution $z = -\dfrac{b}{a}$.

> **Remarque**
> La mise sous forme algébrique n'était pas demandée ici, et l'équation est déjà résolue : $\dfrac{3i}{3+i}$ est un complexe parfaitement défini. Le mettre sous forme algébrique est sûrement plus confortable, mais pas indispensable pour répondre à la question.

1. L'équation s'écrit encore $z(3+i)-3i=0$, soit $z(3+i)=3i$, donc l'unique solution est $z = \dfrac{3i}{3+i}$.
Cette solution peut se mettre sous forme algébrique de la manière suivante :
$$\frac{3i}{3+i} = \frac{3i(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{9i-3i^2}{9-i^2} = \frac{3+9i}{10}.$$
2. Cette fois l'équation s'écrit $(5+i)z=4$, qui possède pour unique solution
$$z = \frac{4}{5+i} = \frac{4(5-i)}{5^2-i^2} = \frac{20-4i}{26} = \frac{10-2i}{13}.$$
3. L'équation n'a de sens que pour $z \neq 2$. Et alors pour un tel z, on a $\dfrac{z+1}{z-2} = 3i$ si et seulement si $z+1 = 3iz-6i$ soit encore $z(1-3i) = -1-6i$, ce qui est le cas uniquement pour $z = -\dfrac{1+6i}{1-3i}$.
Là encore, en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur, on obtient
$$z = -\frac{(1+6i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = -\frac{1+9i+18i^2}{1^2-9i^2} = \frac{17-9i}{10}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3

Cherchons à chaque fois les solutions sous forme algébrique : $z = a+ib$, avec $a, b \in \mathbf{R}$.

> **Détails**
> L'unicité signifie que deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

1. On a $2z+3\overline{z} = 2(a+ib)+3(a-ib) = 5a-ib$.
Et donc par unicité de la forme algébrique , $z = a+ib$ est solution si et seulement si $5a=4$ et $-b=-3$. Donc $z = \dfrac{4}{5}+3i$ est l'unique solution de l'équation.
2. Sur le même principe, $3z-2\overline{z} = 3(a+ib)-2(a-ib) = a+5ib$, et donc z est solution si et seulement si $a=-5$ et $5b=1$. Donc $z = -5+\dfrac{1}{5}i$ est l'unique solution de l'équation.

3. On a $z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + 2aib - b^2$ et $z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.
Donc déjà, si z est solution, alors par identification des parties réelles, $a^2 + b^2 = a^2 - b^2$, de sorte que $b^2 = 0$, donc $b = 0$.
Ainsi, z est réel. Et inversement, pour tout réel a, $a^2 = a\overline{a}$, donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres réels.

Solution de l'exercice 4

C'est un simple calcul, en se rappelant que pour tout nombre complexe z, on a $|z|^2 = z\overline{z}$.
Il vient donc, pour tous z, z' complexes :

$$\begin{aligned}
|z+z'|^2 + |z-z'|^2 &= (z+z')\left(\overline{z+z'}\right) + (z-z')\left(\overline{z-z'}\right)\\
&= (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) + (z-z')\left(\overline{z}-\overline{z'}\right)\\
&= z\overline{z} + z\overline{z'} + \cancel{z'\overline{z}} + \cancel{z'\overline{z'}} + z\overline{z} - \cancel{z'\overline{z}} - \cancel{z'\overline{z'}} + z'\overline{z'}\\
&= 2z\overline{z} + 2z'\overline{z'}\\
&= 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5

Puisque pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, on a déjà $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ si et seulement si $|z| = \frac{1}{|z|}$, soit si et seulement si $|z|^2 = 1$.
Puisque $|z|$ est un réel positif, c'est donc que $|z| = 1$, soit encore $z \in \mathbf{U}$.

> ⚠ **Attention !**
> À ce stade, nous n'avons pas pris en compte la seconde équation, donc n'en concluons surtout pas que tous les nombres complexes de $\mathbf{U}$ sont solution, mais seulement que toutes les solutions sont dans $\mathbf{U}$, certains complexes de module 1 n'étant probablement pas solution (par exemple $z = -1$).

À présent, soit $z = a + ib$ un élément de $\mathbf{U}$ écrit sous forme algébrique, donc avec $a, b \in \mathbf{R}$.
On a alors $|z| = |z+1|$ si et seulement si[1] $|z|^2 = |z+1|^2$.
Or $|z|^2 = a^2 + b^2$ et $|z+1|^2 = |(a+1) + ib|^2 = (a+1)^2 + b^2$.
Donc $|z|^2 = |z+1|^2$ si et seulement si

$$a^2 + b^2 = (a+1)^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 = (a+1)^2 \Leftrightarrow a^2 = a^2 + 2a + 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Et alors puisque $z \in \mathbf{U}$, on a $|z|^2 = 1$, donc $a^2+b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1-a^2 = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Donc $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, les seules solutions possibles sont $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Inversement, si $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $|z| = 1$ et $|z+1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$, si bien que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z+1|$.

Donc $\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est bien solution du problème, et on vérifie de même que $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est également solution.

Géométriquement : il s'agissait de résoudre le système d'équations $\begin{cases} |z| = \left|\frac{1}{z}\right| \\ |z| = |z+1| \end{cases}$.
Nous avons déjà dit que la première équation possède pour solution tous les complexes de $\mathbf{U}$.
Et pour la seconde, notons que $|z| = |z-0|$ et $|z+1| = |z-(-1)|$.
Or $|z-0|$ est la distance entre le point d'affixe z et l'origine et $|z-(-1)|$ est la distance entre le point d'affixe z et le point d'affixe -1.
Résoudre cette équation, c'est trouver les affixes de tous les points équidistants de O et de $A(-1,0)$. Autrement dit, c'est trouver les affixes de tous les points de la médiatrice de $[OA]$.
Cette médiatrice est la droite[2] d'équation $x = -\frac{1}{2}$.
Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des affixes des points qui sont à la fois sur le

[1] Un module est positif.

[2] Verticale.

cercle trigonométrique[3] et sur la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.
Mais ces points d'intersection sont au nombre de deux, et ce sont les points de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
On retrouve donc bien les images des complexes obtenus précédemment par le calcul.

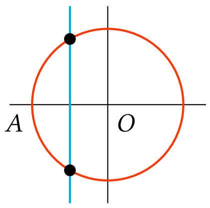

FIGURE 0.1 – Les deux points d'intersection du cercle trigonométrique et de la médiatrice de $[AO]$.

[3] C'est l'ensemble des points d'affixe dans $\mathbb{U}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6

Il s'agit essentiellement de mettre les complexes en question sous forme exponentielle, ce qui nécessite de calculer en premier lieu leur module, puis de trouver[4] un θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

[4] Et pour cela, il vous faudra connaître les valeurs usuelles de sin et cos en $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$, et au besoin **utiliser un cercle trigonométrique**.

1. On a $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = 3$.
   Et alors $\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   Donc un argument de z_1 est $-\frac{\pi}{3}$.
2. On a $|z_2| = 7$ et donc $\frac{z_2}{|z_2|} = -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
   Donc $-\frac{\pi}{2}$ est un argument de z_2.
3. On a $|z_3| = 9$ et
   $$\frac{z_3}{|z_3|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$
   Donc $\frac{5\pi}{6}$ est un argument de z_3.
4. Varions les plaisirs : plutôt que de calculer le module de z_4, notons que $z_4 = 4\sqrt{23}(-1+i)$.
   Or multiplier un complexe par un réel strictement positif ne change pas ses arguments, donc il s'agit de déterminer un argument de $-1+i$.
   Or $-1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
   Donc $\frac{3\pi}{4}$ est un argument de $-1+i$, et donc de z_4.

Remarque
Il s'agit même de ce que nous avons nommé l'argument principal puisqu'il est dans $]-\pi, \pi[$, mais $-\frac{\pi}{3} + 2\pi$ et $-\frac{\pi}{3} + 2022\pi$ sont aussi des arguments de z_1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7

Rappelons la méthode : pour déterminer la forme exponentielle de z, il faut d'abord déterminer $|z|$, puis reconnaître θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

1. On a $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$.
   Et alors
   $$\frac{z_1}{|z_1|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{-\frac{3i\pi}{4}}.$$
   Donc $z_1 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

Remarque
On a aussi
$$\frac{z_1}{|z_1|} = e^{\frac{5i\pi}{4}}.$$

2. On a $|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$.

Et alors
$$\frac{z_2}{|z_2|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$
Donc $z_2 = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

3. On a évidement $|z_3| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, puisque pour un réel, module et valeur absolue coïncident.

Mais $-1 = e^{i\pi}$, donc la forme exponentielle de z_3 est $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi}$.

4. Allons un peu plus vite, et remarquons que $z_4 = 7\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Unicité

Même si nous ne l'avons pas calculé explicitement, l'unicité de la forme exponentielle nous dit alors que $|z_4| = 7$.

Solution de l'exercice 8

1. On a $|j| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$.

Donc il existe un $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $j = e^{i\theta}$.

Or, on a reconnu que $-\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, si bien que
$$j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

2. On a donc $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

De même, $j^3 = e^{i3\frac{2\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$.

Et donc $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

Remarque *: cette formule s'inscrit dans un cadre plus général. En effet, la formule que vous avez rencontrée au lycée pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$:*

$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ *reste valable si $q \in \mathbf{C}$.*

En particulier, ici pour $q = j$, on a $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j}$.

Or $j^3 = 1$ et donc $1 - j^3 = 0$.

3. Il serait bien entendu possible de procéder par récurrence, mais notons plutôt que par la question 2, $1 + j = -j^2$.

Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(1+j)^{2n+1} = \left(-j^2\right)^{2n+1} = (-1)^{2n+1}j^{4n+2} = (-1) \times j^2 \times \left(j^4\right)^n$.
Mais $j^3 = 1$, donc $j^4 = j$, si bien que $\left(j^4\right)^n = j^n$, et donc $(1+j)^{2n+1} = -j^{n+2}$.

Solution de l'exercice 9

1. Il s'agit d'utiliser la formule d'addition pour le cosinus :
$$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta).$$
Mais par ailleurs, nous savons que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, et donc $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$, si bien que
$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - (1 - \cos^2(\theta)) = 2\cos^2(\theta) - 1.$$
Et de même, $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$ si bien que
$$\cos(2\theta) = 1 - \sin^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta).$$

Rappel

Pour tous réels a et b,
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

2. En particulier, en remplaçant θ par $\frac{\theta}{2}$, il vient
$$\cos(\theta) = \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$
Et donc $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}$ et $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}$.

3. Puisque $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\dfrac{7\pi}{6}$, en prenant $\theta = \dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$, on a donc $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Et donc à l'aide des formules de la question précédente,

$$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Et de même, $\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{1-\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Ceci ne suffit pas tout à fait à déterminer les valeurs de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ car il y a encore une ambiguïté sur leur signe.
Mais puisque $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{7\pi}{12} < \pi$, $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) < 0$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) > 0$.
Et donc il vient

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Détails

Placer approximativement $\frac{7\pi}{12}$ sur un cercle trigonométrique pour retrouver ces signes.

4. Notons $z = (\sqrt{2}-\sqrt{6}) + i\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$.
On a donc

$$|z|^2 = \left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 = 2 - 2\sqrt{12} + 6 + 2 + 2\sqrt{12} + 6 = 16.$$

Donc $|z| = 4$. Et alors

$$z = 4\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right).$$

Le lien avec ce qui précède n'est pas totalement évident, mais notons que

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{2-2\sqrt{12}+6}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

et que $\left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Puisque $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ sont tous deux négatifs et de même carré, ils sont égaux.
On prouve de même[5] que $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, si bien que

$$z = 4\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) = 4e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

Et donc en multipliant le tout par 3,

$$3\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right) + 3i\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) = 12e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

[5] En prouvant qu'ils ont même carré **et** sont de même signe.

Solution de l'exercice 10

Le plus simple est sûrement de passer par la forme exponentielle, en se rappelant qu'un complexe non nul z est un réel si et seulement si il a pour argument un multiple entier de π.
En effet, si θ est un argument de z, alors

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta)$$

qui possède une partie imaginaire nulle si et seulement si $\sin(\theta) = 0$, ce qui est le cas si et seulement si θ est un multiple entier de π.

Remarque

Tous les arguments de z différant d'un multiple entier de 2π, si l'un de ces arguments est un multiple entier de π, alors tous les autres aussi.

On a $|\omega| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$. Et donc

$$\omega = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\omega^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
Ainsi, un argument de ω^n est $\frac{n\pi}{6}$.
Il s'agit donc de trouver tous les entiers n pour lesquels $\frac{n\pi}{6}$ est un multiple entier de π.
C'est le cas si et seulement si $\dfrac{n}{6}$ est un entier, donc si et seulement si 6 divise n.

Soyons un peu plus subtils : si un argument d'un complexe non nul z est un multiple pair de π, c'est-à-dire un multiple de 2π, alors z est un réel **positif.**
En effet, si on note $\theta = 2k\pi$ un tel argument, alors $z = |z|e^{2ik\pi} = |z|e^{i0} = |z| > 0$.
Et si θ est un multiple impair de π, c'est-à-dire s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\theta = (2k+1)\pi$, alors

$$z = |z|e^{2i(k+1)\pi} = |z|\underbrace{e^{i\pi}}_{=-1}\underbrace{e^{2ik\pi}}_{=1} = -|z| < 0.$$

Donc $\omega^n \in \mathbf{R}_+$ si et seulement si $\dfrac{n}{6}$ est un entier pair, ce qui est le cas si et seulement si n est divisible par 12.

Solution de l'exercice 11

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2, dont le discriminant vaut

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 169 = -576 = -4 \times 144 = -4 \times 12^2 = -24^2.$$

Donc ses solutions sont $z_1 = \dfrac{-10 + i\sqrt{-\Delta}}{2} = -5 + 12i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -5 - 12i$.

> **Rappel**
> Pour une équation à coefficients réels (les seules dont traite le cours), lorsqu'il y a deux solutions complexes non réelles, celles-ci sont conjuguées.

Solution de l'exercice 12

1. Pour $z \neq 0$, on a $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\theta)$ si et seulement si

$$z^2 + 1 = 2z\cos(\theta) \Leftrightarrow z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0.$$

Il s'agit d'une équation de degré 2, dont le discriminant vaut
$\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = 4(\cos^2(\theta) - 1) \leqslant 0$.

> **Signe**
> $\cos^2(\theta) \leqslant 1$, donc
> $$\cos^2(\theta) - 1 \leqslant 0.$$

▸ **Premier cas : $\theta = 0$.**
On a alors $\Delta = 0$, mais l'équation n'est rien d'autre que $z^2 - 2z + 1 = 0$, qui s'écrit encore $(z-1)^2 = 0$, qui possède pour unique solution $z = 1$.
▸ **Second cas : $\theta = \pi$.**
On a là aussi $\Delta = 0$, mais l'équation s'écrivait cette fois $z^2 + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = 0$, qui possède pour unique solution $z = -1$.
Troisième cas : $\theta \in]0, \pi[$. On a alors $\cos(\theta) \in [0, 1[$, et donc $\Delta < 0$.
Donc l'équation possède deux solutions qui sont

$$z_1 = \frac{2\cos(\theta) + i\sqrt{4(1-\cos^2(\theta))}}{2} \text{ et } z_2 = \overline{z_1}.$$

Mais $1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$, et puisque $\theta \in]0, \pi[$, $\sin\theta > 0$, si bien que
$\sqrt{4(1-\cos^2(\theta))} = \sqrt{4\sin^2(\theta)} = 2\sin(\theta)$.
Et donc $z_1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$ et $z_2 = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
Remarque *: notons que pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, l'unique solution est encore $e^{i\theta} = e^{-i\theta}$.*

2. Nous venons donc de prouver qu'il n'existe qu'au plus deux tels complexes z.
Si $z = e^{i\theta}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$z^n + \frac{1}{z^n} = e^{in\theta} + \frac{1}{e^{in\theta}} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta).$$

> **Détails**
> La dernière égalité provient de la formule d'Euler.

Et de même, si $z = e^{-i\theta}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$z^n + \frac{1}{z^n} = e^{-in\theta} + \frac{1}{e^{-in\theta}} = e^{-in\theta} + e^{in\theta} = 2\cos(n\theta).$$

Et donc dans tous les cas, si $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\theta)$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13

1. On a $\alpha_1^2 = \left(\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = re^{2i\frac{\theta}{2}} = re^{i\theta} = \alpha$.
Donc α_1 est bien solution de (E_α).

2. Pour $z \in \mathbf{C}$, on a $z^2 = \alpha$ si et seulement si $z^2 - \alpha = 0$, soit encore $z^2 - \alpha_1^2 = 0$.
Or $z^2 - \alpha_1^2 = (z - \alpha_1)(z + \alpha_1)$, si bien que $z^2 = \alpha$ si et seulement si $(z - \alpha_1)(z + \alpha_1) = 0$.
Puisqu'un produit de complexes est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, on en déduit que $z - \alpha_1 = 0 \Leftrightarrow z = \alpha_1$ ou $z + \alpha_1 = 0 \Leftrightarrow z = -\alpha_1 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
Donc l'équation (E_α) possède exactement deux solutions qui sont α_1 et $-\alpha_1$.
La forme exponentielle de $-\alpha_1$ est alors

$$-\alpha_1 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\pi}\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}.$$

3. On a $|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, et donc

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

On en déduit que les solutions de $z^2 = 2 - 2i$ sont $z = \sqrt{2\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $z = -\sqrt{2\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{8}}$.

De même, $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et donc les racines carrées de $\sqrt{3} - i$, c'est-à-dire les solutions de $z^2 = \sqrt{3} - i$ sont $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ et $-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14

1. Pour $z \in \mathbf{C}$, on a

$$(z-(3+i))^2-8-6i = z^2-2z(3+i)+(3+i)^2-8-6i = z^2-(6+2i)z+9+6i+i^2-8-6i = z^2-(6+2i)z.$$

2. On a donc $z^2 - (6 + 2i)z + 4 + 2i(3 + 2\sqrt{3}) = 0$ si et seulement si

$$(z-(3+i))^2-8-6i+4+2i(2\sqrt{3}+3) = 0 \Leftrightarrow (z-(3+i))^2-4+4i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (z-(3+i))^2 = 4-4i\sqrt{3}.$$

3. On a $4 - 4i\sqrt{3} = 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Et donc par l'exercice précédent, $(z-(3+i))^2 = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$ si et seulement si $z-(3+i) = \sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ou $z - (3 + i) = -\sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
Donc l'équation (E) possède deux solutions, qui sont

$$z_1 = \sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{6}} + 3 + i \text{ et } z_2 = -\sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{6}} + 3 + i.$$

Reste alors à mettre ces solutions sous forme algébrique, en se rappelant que par définition, $e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$.
Et donc les solutions de (E) sont

$$z_1 = 3 + \sqrt{6} + i(1 - \sqrt{2}) \text{ et } z_2 = 3 - \sqrt{6} + i(1 + \sqrt{2}).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 15

Commençons par noter que $z = 0$ est évidemment solution de l'équation.
Pour $z \neq 0$, notons $z = re^{i\theta}$ sa forme exponentielle, donc avec $r > 0$.
On a alors $z^2 = r^2e^{2i\theta}$ et $\overline{z} = re^{-i\theta}$.
Par conséquent, on a $z^2 = \overline{z}$ si et seulement si $r^2e^{2i\theta} = re^{-i\theta}$, soit encore $e^{2i\theta} = re^{-i\theta}$.
Or deux complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même module et que leurs arguments sont congrus modulo 2π. Donc $z^2 = \overline{z}$ si et seulement si $r = 1$ et $2\theta \equiv -\theta$ $[2\pi]$.
Cette dernière condition signifie qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $2\theta = -\theta + 2k\pi \Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}$.

Détails
$r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta}$ si et seulement si

$$\begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 \equiv \theta_2 \quad [2\pi] \end{cases}$$

Donc les solutions de l'équation sont 0 et les $e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, pour $k \in \mathbf{Z}$.

Remarque : on peut en fait prouver qu'il n'y a que 3 solutions non nulles. En effet, si $k \in \mathbf{Z}$ est divisible par 3, $e^{i\frac{2k\pi}{3}} = 1$, si k est de la forme $3p+1$, avec $p \in \mathbf{Z}$, alors $e^{i\frac{2k\pi}{3}} = e^{i\frac{2}{3}}e^{2ip\pi} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, et si k est de la forme $3p+2$, alors $e^{i\frac{2k\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{2ip\pi} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Alternative : on peut également chercher les solutions sous forme algébrique. Si $z = a+ib$, on a alors $z^2 = a^2 + 2iab - b^2$ et $\overline{z} = a - ib$.
Donc l'équation s'écrit encore $a^2 + 2iab - b^2 = a - ib$.
Ainsi, par identification des parties réelles et imaginaires, z est solution si et seulement si
$\begin{cases} 2ab = -b \\ a^2 - b^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(2a+1) = 0 \\ a^2 - b^2 = a \end{cases}.$
Notons que la première équation est satisfaite si et seulement si[6] $b = 0$ ou $2a+1 = 0$.
▶ Si $b = 0$, alors la seconde équation est $a^2 = a$, ce qui n'est possible que pour $a = 0$ et $a = 1$.
▶ Si $2a+1 = 0$, c'est-à-dire si $a = -\dfrac{1}{2}$, alors la seconde équation est

$$a^2 - b^2 = a \Leftrightarrow \frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{3}{4}.$$

Donc $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc l'équation possède 4 solutions, qui sont 0, 1, $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

[6] Un produit de complexes est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Solution de l'exercice 16

1. On a $z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + 2iab + (ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$.
   Donc[7] $z^2 = \alpha = A + iB$ si et seulement si $\begin{cases} a^2 - b^2 = A \\ 2ab = B \end{cases}$
2. Si $z^2 = \alpha$, alors $|z^2| = |\alpha|$, c'est-à-dire $|z|^2 = |\alpha|$, soit encore $a^2 + b^2 = \sqrt{A^2+B^2}$.
3. Ainsi, si $z^2 = \alpha$, on a à la fois $a^2 - b^2 = A$ et $a^2 + b^2 = \sqrt{A^2+B^2}$.
   En additionnant ces deux égalités, il vient $2a^2 = A + \sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{A^2+B^2} + A\right)$.
   Et de même, en soustrayant ces deux égalités,
   $$2b^2 = \sqrt{A^2+B^2} - A \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2+B^2} - A\right).$$
4. L'équation $2ab = B$ nous dit que si B est positif, alors ab aussi, donc a et b sont de même signe.
   Et si $B < 0$, alors $ab < 0$, donc a et b sont de signes opposés.
5. Pour $\alpha = -1 + i$, on a $A = -1$ et $B = 1$.
   Si bien que si $z = a + ib$ est l'une des deux solutions[8] de $z^2 = \alpha$, alors
   $$a^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2+B^2} + A\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right) \text{ et } b^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right).$$
   Et de plus, puisque $B > 0$, a et b sont de même signe.
   Donc soit $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et alors $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}+1}$, soit $a = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et alors $b = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}+1}$.
   Donc les deux racines carrées de $-1+i$ sont $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}-1} + i\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)$ et son opposé $(-u)$.

   De même, si $\alpha = -5 - 12i$, alors $A = -5$ et $B = -12$.
   Donc si $z = a + ib$ est une racine carrée de α, alors $a^2 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{A^2+B^2} + A\right) = 4$ et $b^2 = 9$.
   De plus, B étant négatif, a et b sont de signes opposés.
   Donc soit $a = 2$ et alors $b = -3$, soit $a = -2$ et alors $b = 3$.
   Donc les deux racines carrées de $-5 - 12i$ sont $-2 + 3i$ et son opposé.

[7] Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales.

[8] Par l'exercice 13, nous savons que l'équation $z^2 = \alpha$ possède deux solutions.

Raisonnement

Nous venons de prouver que **si** z est une racine carrée de $-1+i$, **alors** c'est l'un des deux nombres complexes (u et $-u$) que nous venons d'obtenir.
Mais cela ne garantit pas directement que ces deux complexes sont des racines carrées de $-1+i$.
Nous pourrions le vérifier (en calculant leur carré), ou alors remarquer que l'exercice 16 nous garantit qu'il existe exactement deux telles racines carrées. Or nous venons de prouver que ces deux racines ne peuvent être que u et $-u$.
Nécessairement, u et $-u$ sont les deux racines carrées de $-1+i$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17

1. Nous savons déjà que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Donc

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

2.a. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos^4(x) = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4$. Or

$$\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2 = e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4 &= \left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)^2\\
&= e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\\
&= \left(e^{ix}+e^{-i4x}\right) + 4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right) + 6\\
&= 2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6.
\end{aligned}$$

Et donc $\cos^4(x) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{8}\cos(4x)$.

2.b. On a

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\\
&= \frac{1}{8}\left(\left(e^{ix}\right)^3 + 3\left(e^{ix}\right)^2 e^{-ix} + 3e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^3 + \left(e^{-ix}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + 3\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\\
&= \frac{\cos(3x)}{4} + 3\frac{\cos(x)}{4}.
\end{aligned}$$

On applique la formule de la question 1.

Et sur le même principe,

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\\
&= \frac{1}{-8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)\\
&= \frac{-1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\\
&= \frac{-\sin(3x)}{4} + 3\frac{\sin(x)}{4}.
\end{aligned}$$

Et donc au final, il vient

$$\cos^3(x) + 2\sin^3(x) = \frac{\cos(3x)}{4} + 3\frac{\cos(x)}{4} - \frac{\sin(3x)}{2} + \frac{3\sin(x)}{2}.$$

2.c. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}\right)^3\\
&= \frac{1}{-32i}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\\
&= \frac{-1}{32i}\left[\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right]^2\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\\
&= \frac{-1}{32i}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)^2\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\\
&= \frac{-1}{32i}\left(e^{4ix}-2+e^{-4ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)
\end{aligned}$$

Astuce
Le fait de «couper en deux» la puissance 3 va nous permettre de faire apparaître une identité remarquable et alléger un peu le calcul. Mais un développement «brutal» en utilisant la première question est tout aussi valable… s'il ne comporte pas d'erreur de calcul.

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{32i}\left(e^{5ix} - e^{3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}\right)\\
&= \frac{-1}{16}\left(\frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i} - \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 2\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\\
&= -\frac{\sin(5x)}{16} + \frac{\sin(3x)}{16} + \frac{1}{8}\sin(x).
\end{aligned}$$

3. Les expressions linéarisées obtenues à la question précédente sont bien plus faciles à intégrer que les expressions de départ.
Donc une primitive de $x \mapsto \cos^4(x)$ est $x \mapsto \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32}$.
Une primitive de $x \mapsto \cos^3(x) + 2\sin^3(x)$ est $x \mapsto \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{\cos(3x)}{6} - \frac{3\cos(x)}{2}$.
Enfin, une primitive de $x \mapsto \cos^2(x)\sin^3(x)$ est $x \mapsto \frac{\cos(5x)}{80} - \frac{\cos(3x)}{48} - \frac{\cos(x)}{8}$.

> **Rappel**
> Une primitive de $x \mapsto \sin(kx)$ est $x \mapsto \frac{-\cos(kx)}{k}$ et une primitive de $x \mapsto \cos(kx)$ est $x \mapsto \frac{\sin(kx)}{k}$.

Solution de l'exercice 18

1. Procédons par étapes en mettant déjà numérateur et dénominateur sous forme exponentielle. On a $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$ et donc $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
De même, $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Donc $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.
Et alors pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^n = \sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{12}}$$

qui est bien sous forme exponentielle.
Et donc $z_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{12}\right)\right)$ en est la forme algébrique.

> **Méthode**
> La forme exponentielle est particulièrement adaptée aux quotients (et aux produits) : si on connaît les formes exponentielles de a et b, on connaît celle de $\frac{a}{b}$.

2. On a $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et donc $(1 - i)^n = \sqrt{2}^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$.
Et donc

$$\begin{aligned}
(1 - i)^n - \sqrt{2}^n &= \sqrt{2}^n\left(e^{-i\frac{n\pi}{4}} - 1\right) = \sqrt{2}^n e^{-i\frac{n\pi}{8}}\left(e^{-i\frac{n\pi}{8}} - e^{i\frac{n\pi}{8}}\right)\\
&= e^{-i\frac{n\pi}{8}}2i\sin\left(\frac{-n\pi}{8}\right).
\end{aligned}$$

Et alors $(1 + i)^n - \sqrt{2}^n = \overline{(1 - i)^n - \sqrt{2}^n} = -2ie^{-i\frac{-n\pi}{8}}\sin\left(\frac{-n\pi}{8}\right)$.
Notons que ce dénominateur est nul si $\sin\left(\frac{-n\pi}{8}\right) = 0$, c'est-à-dire lorsque $\frac{-n\pi}{8}$ est un multiple entier de π, c'est-à-dire lorsque n est divisible par 8.
Pour de tels n, z_2 n'est tout simplement pas défini.

Et sinon,

$$z_2 = \frac{2ie^{i\frac{-n\pi}{8}}\sin\left(\frac{-n\pi}{8}\right)}{-2ie^{-i\frac{-n\pi}{8}}\sin\left(\frac{-n\pi}{8}\right)} = -e^{i\frac{-n\pi}{4}}.$$

On en déduit que $z_2 = \cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right)$.

> **Méthode**
> Pour déterminer la forme exponentielle de $e^{i\theta} \pm 1$, on factorise par $e^{i\frac{\theta}{2}}$ et on utilise les formules d'Euler.

3. On a $1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta) = 1 + e^{i\theta}$.
Factorisons alors par $e^{i\frac{\theta}{2}}$, si bien que

$$1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Et donc $z_3 = 4^n\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{n\theta}{2}}$.
Puisque $4^n\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$, il s'agit bien de la forme exponentielle.
Et alors la forme algébrique de z_3 est

$$z_3 = 4^n\cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right).$$

> **Détails**
> $$\cos^{2n}(\theta/2) = (\cos^n(\theta/2))^2$$
> qui est positif comme tout carré de nombre réel.

4. On a $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et donc $(1+i)^n=\sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$ et donc
$$(1-i)^n=\overline{(1+i)^n}=\sqrt{2}^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}.$$
Et donc
$$(1+i)^n-(1-i)^n=\sqrt{2}^n\left(e^{i\frac{n\pi}{4}}-e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right)=\sqrt{2}^n 2i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$
Donc $z_4=2\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.
Il s'agit directement là de sa forme algébrique.
Si $\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0$, il s'agit également de sa forme exponentielle : $z_4=2\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)e^{i0}$.
Dans le cas où $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)<0$,
$$z_4=\underbrace{\left(-2\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)}_{>0}e^{i\pi}.$$

Remarque : on aurait également pu se souvenir que $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$, ce qui fournit une autre méthode pour prouver que $(1+i)^n-(1-i)^n=\sqrt{2}^n 2i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

Plus loin

Un cercle trigonométrique peut nous aider à trouver pour quelles valeurs de n le sinus est positif.
Ce sont les n pour lesquels il existe un entier k tel que
$$2k\pi\leqslant n\frac{\pi}{4}\leqslant(2k+1)\pi$$
soit encore
$$\frac{k}{2}\leqslant n\leqslant\frac{k}{2}+\frac{1}{4}.$$