Feuille d'exercices n^{o}9 : Comparaison de fonctions et de suites

Exercice 1 [Vrai–Faux sur les relations de comparaison]

1. V : (u_n) bornée donc $u_n = \mathrm{O}(1)$ puis $v_n = \mathrm{O}(1)$ (transitivité) donc (v_n) bornée.
2. F : implique seulement (v_n) bornée ;
3. V : $u_n = \mathrm{o}(1)$ donc $v_n = \mathrm{o}(1)$ donc (v_n) converge (tend vers 0) ;
4. V : (u_n) converge donc bornée donc $u_n = \mathrm{O}(1)$ puis $v_n = \mathrm{o}(1)$ donc (v_n) converge (tend vers 0) ;
5. F : $u_n = \dfrac{1}{n!}$ (vrai si la limite est non nulle).
6. F : $u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ pair} \\ 1/n^2 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ (vrai si limite non nulle)
7. F : $u_n = e^n$; V : composition (à droite) ; F : $u_n = \ln(n)$;
8. F : $u_n = 1-(1/n)$ et $v_n = 1+(1/n)$; V : $\times 2$; V : produit ; V : faire avec o ; F : $u_n = n$ et $v_n = n+1$; F : $u_n = 1+(1/n)$ et $v_n = 1-(1/n)$
9. F : $\Rightarrow$ vraie (composition à droite) mais $\Leftarrow$ fausse ($u_n = n\cdot 2^n$) ; F : $\Rightarrow$ fausse ($u_n = 2^n + n$) mais $\Leftarrow$ vraie (car $\mathrm{o}(1) = \mathrm{o}(2^n)$) ; F : $\Rightarrow$ vrai (composition avec ln, cf. cours) mais $\Leftarrow$ fausse ($u_n = 37\cdot 2^n$) ; V (transformation équivalents/o)

Exercice 2 [Ordres de grandeur]

$$\frac{1}{n^2} << \frac{1}{n} << \frac{\ln(n)}{n} < \frac{\ln(n^2)}{n} << \frac{(\ln(n))^2}{n} << \ln(n) < \ln(n^2) << (\ln(n))^2$$
$$<< n << n\ln(n) << n^2 << \frac{2^n}{n} << 2^n << \frac{e^n}{n} << e^n << (2^n)^2 << n! << n^n << 2^{n^2}.$$

Exercice 3 [Limites de fonctions]

1. $\dfrac{\tan(x) - x\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)-1} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\mathrm{o}(x)}{x+\mathrm{o}(x)} \underset{x\to 0}{\to} 0$;
2. $\dfrac{\sin(x)\ln(1+x)}{x\tan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} \underset{x\to 0}{\to} 1$;
3. $\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right)\right)^{x^2} = \exp\left(x^2\ln\left(\cos(1/\ln(x))\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

   car $x^2\ln\left(\cos(1/\ln(x))\right) = x^2\ln\left(1 - \dfrac{1}{2\ln(x)^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\ln(x)^2}\right)\right) \sim -\dfrac{x^2}{2\ln(x)^2} \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty$;
4. $\dfrac{\cos(2x)-\cos(5x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{21/2x^2 + \mathrm{o}(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} 21/2 + \mathrm{o}(1) \underset{x\to 0}{\to} 21/2$;
5. $\dfrac{x\ln(x) - x}{x+\cos(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$;
6. $\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} = x\left(\sqrt[3]{1+(1/x^2)} - \sqrt{1+(1/2+1/x^2)}\right)$

   $\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\dfrac{1}{3x^3} + \mathrm{o}(1/x^3) - 1 - \dfrac{1}{2x} + \mathrm{o}(1/x)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(-\dfrac{1}{2x} + \mathrm{o}(1/x)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -1/2 \underset{x\to+\infty}{\to} -1/2$;
7. $(\ln(e+x))^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\ln(\ln(e+x))}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$

   car $|\ln(\ln(e+x))| \leqslant \ln(\ln(ex)) = \ln(1+x) \leqslant \ln(2x) = \ln(2)+\ln(x) = \mathrm{o}(x)$ puis $\dfrac{\ln(\ln(e+x))}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$;

8. $\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\to} e^2$
car $\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1+\dfrac{2x}{x^2-x+1} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\dfrac{2}{x}+\mathrm{o}(1/x)\right.$ puis $x\ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\cdot\dfrac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 2$;

9. $(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}\right) \underset{x\to0}{=} \exp\left(\dfrac{\alpha x+\mathrm{o}(x)}{x}\right) \underset{x\to0}{=} \exp(\alpha+\mathrm{o}(1)) \underset{x\to0}{\to} \alpha$;

10. $\dfrac{x^{\ln(x)}}{\ln(x)} \geqslant \dfrac{x^2}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ (par minoration) ;

11. $\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right)^{\frac{\ln(x)}{x}} = y^{1/y} = \exp\left(\dfrac{\ln(y)}{y}\right) \underset{y\to+\infty}{\to} 1$;

12. $\dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-2\ln(x)+2\ln(x)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+1})}{2x}\right)}{\ln(x)}+2 \underset{x\to+\infty}{\to} 2$

Exercice 4 [Calculs d'équivalents et de limites]

1. $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2} \underset{x\to0}{\sim} x^2 \underset{x\to0}{\to} 0$;
2. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \underset{x\to0}{\to} 0$;
3. $\dfrac{\cos(x)}{1+x}-1 \underset{x\to0}{\sim} -x \underset{x\to0}{\to} 0$;
4. $(x+1)^x-x^x \underset{x\to+\infty}{\sim} (e-1)x^x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$
5. $x^2\ln(1+x)+x\cos(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$;
6. $\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x)\mathrm{Arctan}(x^3)} \underset{x\to0}{\sim} x^{-7/2} \underset{x\to0}{\to} +\infty$
7. $\dfrac{xe^x-x^2}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$;
8. $\dfrac{\ln(x)}{1-x^2} \underset{x\to1}{\sim} -\dfrac{1}{2} \underset{x\to1}{\to} -\dfrac{1}{2}$.
9. $(\ln(1+x))^2-(\ln(1-x))^2 \underset{x\to0}{\sim} -2x^3 \underset{x\to0}{\to} 0$ (faire avec identité remarquable).

Exercice 5 [Équivalents et limites de suites]

1. $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$;
2. $e^{\tan\frac{\pi}{n^2}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$;
3. $(n+3\ln n)e^{-n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{ne^{-n}}{e} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$;
4. $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$;
5. $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1/3} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$;
6. $\dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln n-2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$;

7. $\dfrac{2n^3-\ln n+1}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$;
8. $\dfrac{n!+e^n}{2^n+3^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$;
9. $n\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1$;
10. $\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e \underset{n\to+\infty}{\to} e$;
11. $\dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Exercice 6 [Équivalent et somme]

f décroissante donc pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x+1)\leqslant f(x)\leqslant f(x-1)$ puis $\dfrac{f(x)+f(x+1)}{2}\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{f(x-1)+f(x)}{2}$

et par composition à droite et multiplication scalaire : $\dfrac{f(x)+f(x+1)}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$ et $\dfrac{f(x-1)+f(x)}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2(x-1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$

donc par encadrement d'équivalents : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$

Exercice 7 [Équivalent d'une somme] On sort les deux derniers termes de la somme :

$$u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=1}^{n-2} k!$$

avec $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $0 \leqslant \dfrac{\sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!} \leqslant \sum_{k=1}^{n-2}\dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{(n-2)}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puis $\dfrac{\sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (par encadrement)

Donc $\dfrac{u_n}{n!} = 1 + \dfrac{(n-1)!}{n!} + \dfrac{\sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ (par somme) donc $u_n \sim n!$ (par définition)

Exercice 8 [Équivalent de suites définies implicitement]

1. $P_n' = 3X^2 - 2(n+2)X + (2n+1) = 3(X-1)\left(X-\dfrac{2n+1}{3}\right)$ d'où variations de P_n pour $n\geqslant 2$:

x	$-\infty$	0	1	3	$\frac{2n+1}{3}$	$+\infty$
P_n'		$+$	0	$-$	0	$+$
P_n	$-\infty \nearrow$	$-1 \nearrow$	$n-1$	$\searrow -3n+11 \searrow$	α_n	$\nearrow +\infty$

avec $\alpha_n = -\dfrac{4}{27}n^3 + \dfrac{4}{9}n^2 + \dfrac{5}{9}n - \dfrac{23}{27}$ qu'on n'a pas besoin de calculer, car $\alpha_n < P_n(3) = -3n+11$ et donc $\alpha_n < 0$ dès que $-3n+11<0$, c'est-à-dire pour $n\geqslant 4$.

(si $n=1$: $P_n' \geqslant 0$ ne s'annulant qu'en 1 donc une seule racine (1 qui est racine triple))
Et donc pour tout $n \geqslant 4$, par corollaire du TVI, P_n a trois racines qui vérifient bien :

$$0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n.$$

2. Relations coefficients racines.
3. Par minoration : $c_n \geqslant \dfrac{2n+1}{3}$ donc $c_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
   puis :
   — comme $1 < b_n < 3$, que $c_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et que $a_n b_n c_n = 1$, alors $a_n \leqslant \dfrac{1}{c_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ par encadrement ;
   — $a_n + b_n + c_n = n + 2 = n + \mathrm{o}(n) \sim n$ avec $a_n + b_n = \mathrm{o}(n)$ (bornées) donc $c_n \sim n$;
   — $2n+1 = a_n b_n + a_n c_n + b_n c_n \sim b_n c_n$ donc $b_n c_n \sim 2n$ puis $b_n \sim 2$;
   — $a_n b_n c_n = 1 \sim 1$ puis $a_n \sim \dfrac{1}{b_n c_n} \sim \dfrac{1}{2n}$.