Feuille d'exercices n^{o}9 : Comparaison de fonctions et de suites

Exercice 1 [Vrai–Faux sur les relations de comparaison]

Prouver ou invalider les affirmations suivantes :

1. Si (u_n) est bornée et $v_n = \mathrm{O}(u_n)$ alors (v_n) est bornée.
2. Si (u_n) converge et que $v_n = \mathrm{O}(u_n)$ alors (v_n) converge.
3. Si (u_n) converge vers 0 et que $v_n = \mathrm{O}(u_n)$ alors (v_n) converge.
4. Si (u_n) converge et que $v_n = \mathrm{o}(u_n)$ alors (v_n) converge.
5. Si (u_n) converge, alors $u_{n+1} \sim u_n$.
6. Si (u_n) converge, alors $u_{n+1} = \mathrm{O}(u_n)$.
7. Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors : $\ln(u_n) = \mathrm{o}(n)$; $\ln(u_n) = \mathrm{o}(u_n)$; $\ln(n) = \mathrm{o}(u_n)$.
8. Si $u_n \sim v_n$ alors : $u_n + 1 \sim v_n + 1$; $2u_n \sim 2v_n$; $u_n v_n \sim u_n^2$; $u_n + v_n \sim 2v_n$; $e^{u_n} \sim e^{v_n}$; $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
9. Le fait que $u_n \sim 2^n$ équivaut à : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim 2$; $u_n - 2^n = \mathrm{o}(1)$; $\ln(u_n) \sim n\ln(2)$; $\dfrac{u_n}{2^n} - 1 = \mathrm{o}(1)$.

Exercice 2 [Ordres de grandeur]

Classer par ordre de grandeur les suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$n,\ n^2,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2},\ \ln(n),\ \ln(n^2),\ (\ln(n))^2,\ \frac{\ln(n)}{n},\ \frac{\ln(n^2)}{n},\ \frac{(\ln(n))^2}{n},\ n\ln(n),\ 2^n,\ e^n,\ \frac{2^n}{n},\ \frac{e^n}{n},\ n^n,\ n!, 2^{n^2},\ (2^n)^2.$$

Exercice 3 [Limites de fonctions]

Déterminer les limites des fonctions suivantes en les points considérés :

1. $\dfrac{\tan(x) - x\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x) - 1}$ en 0 ;
2. $\dfrac{\sin(x)\ln(1+x)}{x\tan(x)}$ en 0 ;
3. $\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right)\right)^{x^2}$ en $+\infty$;
4. $\dfrac{\cos(2x) - \cos(5x)}{x^2}$ en 0 ;
5. $\dfrac{x\ln(x) - x}{x + \cos(x)}$ en $+\infty$;
6. $\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1}$ en $+\infty$;
7. $(\ln(e+x))^{1/x}$ en $+\infty$;
8. $\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$ en $+\infty$;
9. $(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}$ en 0 (pour $\alpha \in \mathbb{R}$) ;
10. $\dfrac{x^{\ln(x)}}{\ln(x)}$ en $+\infty$;
11. $\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right)^{\frac{\ln(x)}{x}}$ en $+\infty$;
12. $\dfrac{\ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\ln(x)}$ en $+\infty$.

Exercice 4 [Calculs d'équivalents et de limites]

Déterminer des équivalents puis les limites des fonctions suivantes en les points considérés :

1. $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ en 0 ;
2. $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$;
3. $\dfrac{\cos(x)}{1+x} - 1$ en 0 ;
4. $(x+1)^x - x^x$ en $+\infty$;
5. $x^2\ln(1+x) + x\cos(x)$ en $+\infty$;
6. $\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x)\mathrm{Arctan}(x^3)}$ en 0 ;
7. $\dfrac{xe^x - x^2}{\mathrm{ch}(x)}$ en $+\infty$;

8. $\dfrac{\ln(x)}{1-x^2}$ en 1 ;

9. $(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2$ en 0.

Exercice 5 [Équivalents et limites de suites]

Déterminer un équivalent et la limite de la suite dont le terme général est :

1. $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$;
2. $e^{\tan \frac{\pi}{n^2}} - 1$;
3. $(n + 3\ln n)e^{-n-1}$;
4. $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$;
5. $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$;
6. $\dfrac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$;
7. $\dfrac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2+1}$;
8. $\dfrac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$;
9. $n\sqrt{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2+1}\right)}$;
10. $\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$;
11. $\dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$.

Exercice 6 [Équivalent et somme]

On considère f une fonction décroissante définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) + f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Déterminer un équivalent de f.

Exercice 7 [Équivalent d'une somme]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} k!$. Montrer que $u_n \sim n!$.

Exercice 8 [Équivalent de suites définies implicitement]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^3 - (n+2)X^2 + (2n+1)X - 1$.

1. Montrer que pour n suffisamment grand le polynôme P_n possède trois racines a_n, b_n, c_n telles que :

$$0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n.$$

2. Montrer que a_n, b_n, c_n vérifient :

$$a_n + b_n + c_n = n+2,\ a_nb_n + a_nc_n + b_nc_n = 2n+1,\ a_nb_nc_n = 1.$$

3. En déduire successivement que : $c_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty,\ a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0,\ c_n \sim n,\ b_n \sim 2,\ a_n \sim \dfrac{1}{2n}$.