Feuille d'exercices n^{o}30 : Fonctions à deux variables

Exercice 1 [Fermés sans passer par les ouverts]

Montrer qu'un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^2$ est fermé si, et seulement si, toute suite d'éléments de F qui converge (dans $\mathbb{R}^2$) a sa limite dans F.

Exercice 2 [Ouverts ou fermés ?]

Représenter dans le plan les ensembles suivants, et dire si ce sont des ouverts, des fermés, ou aucun des deux :

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq y\}$;
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant y\}$;
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > y\}$;
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}$;
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 4\}$;
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < |x - 1| < 1\}$.

Exercice 3 [Fonctions continues en $(0, 0)$?]

Étudier, en utilisant éventuellement un changement en coordonnées polaires, les continuités en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

1. $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;
2. $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$;
3. $(x, y) \mapsto \dfrac{1 + x + y}{x^2 + y^2}$;
4. $(x, y) \mapsto \dfrac{x^5 y^3}{x^6 + y^4}$;
5. $(x, y) \mapsto \dfrac{\sin(x^4) + \sin(y^4)}{\sqrt{x^4 + y^4}}$;
6. $(x, y) \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$.

Exercice 4 [Continuité et paramètres]

On considère $\alpha, \beta > 0$. Déterminer, suivant les valeurs de α et β, si la fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2}$, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, est prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

Exercice 5 [Fonctions lipschitzienne]

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite k-lipschitzienne (pour $k \geqslant 0$) si :

$$\forall x, y, a, b \in \mathbb{R},\ |f(x, y) - f(a, b)| \leqslant k\|(x, y) - (a, b)\|.$$

Montrer qu'une telle fonction est continue.

Exercice 6 [Fonction continue à partir d'une fonction $\mathcal{C}^1$]

On considère $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et on considère $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq y\}$. On pose φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} & \text{si} \quad x \neq y \\ f'(x) & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

1. Montrer que U est un ouvert et que φ est continue sur U.
2. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 f'\left((1 - t)x + ty\right) \mathrm{d}t$$

et en déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 [Calculs de dérivées partielles]

Justifier pour quelles valeurs de x, y les fonctions suivantes admettent des dérivées partielles, et les calculer :

1. $(x,y) \mapsto x^y$;
2. $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$;
3. $(x,y) \mapsto x\sin(x+y)$;
4. $(x,y) \mapsto \mathrm{Arctan}\dfrac{y}{x}$;
5. $(x,y) \mapsto \dfrac{e^{xy}}{x+y}$;
6. $(x,y) \mapsto e^{-x}\cos(y)$.

Dans chacun des exemples précédents, les fonctions sont-elles $\mathcal{C}^1$?

Exercice 8 [Découpage du plan et dérivées partielles]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f : (x,y) \mapsto \min(x,y^2)$.

Étudier les dérivées partielles de f (définition et valeur). On pourra distinguer selon que l'on se place sur l'un des trois ensembles suivants :

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < y^2\},\ V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > y^2\} \text{ et } \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y^2\}$$

et étudier si U, V, Γ sont éventuellement ouverts.

Exercice 9 [Dérivées partielles et intégrale]

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ f(x,y) = \int_x^y \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

Montrer qu'il en est de même pour la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ g(x,y) = \int_{x^2}^{xy} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 10 [Dérivées directionnelles sans continuité]

On considère $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = 0 \text{ ou } (x,y) \notin \mathcal{P} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées directionnelles en 0 suivant tout vecteur, et les calculer.

Exercice 11 [Dérivées partielles et courbes de niveau]

On considère $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on définit la fonction $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $f : (x,y) \mapsto g\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles à l'aide de g.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ on a :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

et en déduire les formes des lignes de niveau de f. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 12 [Caractérisation des fonctions linéaires]

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(tx,ty) = tf(x,y).$$

Calculer les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$ et en déduire que f est linéaire.

Exercice 13 [Différentielles et fonctions homogènes]

On suppose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, homogène de degré $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

1. Montrer que :
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$
2. On suppose que $n \geqslant 1$: montrer que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $(n-1)$.

Exercice 14 [Dérivées en coordonnées polaires]

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et on pose g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall \rho, \theta \in \mathbb{R},\ g(\rho,\theta) = f\left(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)\right).$$

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
3. En déduire les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Exercice 15 [Recherche d'extrema]

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points critiques puis dire s'il s'agit d'extrema locaux ou globaux, en précisant si ce sont des maximums ou des minimums :

1. $(x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$;
2. $(x,y) \mapsto x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$;
3. $(x,y) \mapsto x^3 + y^3$;
4. $(x,y) \mapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$;
5. $(x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$;
6. $(x,y) \mapsto 4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y$;
7. $(x,y) \mapsto e^{x\sin(y)}$.

Exercice 16 [Unique point critique et extrema]

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f : (x,y) \mapsto x^2(1+y)^3 + y^2$.

Montrer que f est $\mathcal{C}^1$, possède un unique point critique, qui est un extremum local, mais ne possède pas d'extremum global.

Cette situation est-elle possible sur $\mathbb{R}$, dans le sens où : pourrait-on trouver une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui admet un extremum local en un point, mais non global, sans autre point critique ?

Exercice 17 [Point de Fermat dans un triangle]

On considère A, B, C trois points du plan, que l'on assimile à $\mathbb{R}^2$.

Montrer que l'application :

$$f : M \mapsto MA + MB + MC$$

est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C\}$, et admet un point critique si, et seulement si, les trois angles du triangles ABC sont inférieurs strictement à $\dfrac{2\pi}{3}$.

Que penser alors de la nature de ce point critique en tant qu'extremum éventuel ?