

Feuille d'exercices n°28 : Séries numériques

Exercice 1 [Natures de séries à termes positifs 1]

On compare à des séries dont on connaît la nature (Riemann ou géométriques), après avoir étudié la divergence grossière éventuelle :

1. $\frac{\ln(n)}{n^5} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge (comparaison à série de Riemann absolument convergente car $2 > 1$) ;
2. $e^{-\sqrt{5+n}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{5+n}^4}\right)$ avec $\frac{1}{\sqrt{5+n}^4} \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série converge (même justification) ;
3. $\frac{n^4 \ln(3n)}{e^{2n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc converge (même justification) ;
4. $\ln\left(\frac{3 + \sin\frac{1}{n}}{3 - \sin\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(1 + 2\frac{\sin\frac{1}{n}}{3 - \sin\frac{1}{n}}\right) \sim \frac{2}{3}\sin\frac{1}{n} \sim \frac{2}{3n}$ qui est le terme général d'une série divergente (critère de Riemann) à termes positifs (ce qui justifie l'utilisation d'équivalents) donc la série diverge ;
5. $\frac{n + e^{-n}}{(n+1)^3} \sim \frac{n}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série converge ;
6. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \neq 0$ donc la série diverge grossièrement ;
7. $\frac{(-1)^n \cos(n)}{n^2 \sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n^2 \sqrt{n}}\right)$ donc converge par comparaison à série de Riemann absolument convergente ($5/2 > 1$) ;
8. $\sqrt{n^2 - 1} - n = n\left(\sqrt{1 - 1/n^2} - 1\right) \sim n \cdot \left(-\frac{1}{2n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n}$ qui est terme général de série divergente (par Riemann) de signe constant (pour légitimer l'usage d'équivalents) ;
9. $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}} = \exp\left(n\sqrt{n}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ et on a :

$$n^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}} = \exp\left(n\sqrt{n}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2\ln(n)\right)$$

avec $n\sqrt{n}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\sqrt{n}$ donc $2\ln(n) = o\left(n\sqrt{n}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ (par croissances comparées). Et ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n\sqrt{n}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2\ln(n)\right) = -\infty$$

et par composée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}} = 0$.

Donc $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série converge (par comparaison à une série de Riemann absolument convergente, car $2 > 1$)

10. $\frac{1}{n^2 + \sin n^6} \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série converge par critère de Riemann ($2 > 1$) ;
11. $\frac{2 + (-1)^n}{3^n} = O\left(\frac{1}{3^n}\right)$ qui est le terme général d'une série absolument convergente (série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1; 1[$) donc la série converge.

Autre méthode : par linéarité directement : $\frac{2 + (-1)^n}{3^n} = 2 \cdot \frac{1}{3^n} + \left(\frac{-1}{3}\right)^n$ qui est combinaison linéaire de termes de séries convergentes (géométriques de raison $1/3$ et $(-1/3)$).

12. $\frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)} \sim \frac{2}{n^2}$ donc la série converge ;
13. $\ln \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n} = \ln \left(1 + \frac{2}{n^2 + 3n} \right) \sim \frac{2}{n^2 + 3n} \sim \frac{2}{n^2}$ donc la série converge ;
14. $\sin \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{-1}{2n^3}$ donc la série converge par critère de Riemann ;
15. $\frac{n}{(n+1)!} \leq \frac{n}{(n+1)n(n-1)} \leq \frac{1}{n^2-1}$ donc $\frac{n}{(n+1)!} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge par comparaison à série de Riemann absolument convergente ;
16. $\left(\frac{e}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \geq 6$, donc la série converge par comparaison à une série géométrique absolument convergente (de raison $1/2 \in]-1; 1[$) ;
17. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$:

$$\sqrt[n]{n+1} = \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right) = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

et comme $\sqrt[n]{n} \sim 1$ (tend vers 1, en passant par la forme exponentielle et en utilisant les croissances comparées) on déduit :

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n} \left(\exp\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \right) \sim \frac{1}{n^2}$$

et donc la série converge.

18. $\frac{1}{n^2 - \ln(n)} \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série converge ;
19. $\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$:

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\exp\left(-\frac{1}{12} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 \right) \sim \frac{-1}{12\sqrt{e}} \frac{1}{n}$$

donc la série diverge par équivalence à une série de Riemann divergente.

20. $\frac{(\ln(n))^n}{n^{\ln(n)}} = \frac{\exp(n \ln(\ln(n)))}{\exp(\ln(n)^2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées, donc la série diverge grossièrement.
21. $\frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)} \sim \frac{e^n/2}{e^{2n}/2} \sim e^{-n}$ qui est le terme général d'une série absolument convergente (géométrique de raison $1/e \in]-1; 1[$) donc la série converge par comparaison.

Exercice 2 [Natures de séries à termes positifs 2]

Si $\sum u_n$ est une série convergente à termes positifs :

- $u_n^2 = o(u_n)$ comme u_n tend vers 0 (par convergence de la série), donc par comparaison de séries à termes positifs on a la convergence de $\sum u_n$;
- $\frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$ comme u_n tend vers 0 (même argument) donc la série $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge par comparaison de séries à termes positifs ;

3. $\frac{u_n}{1-u_n} \sim u_n$ comme ci-dessus, ce qui prouve la convergence de la série ;
4. $\sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ et les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{n+1}$ (on a juste retiré le premier terme, ce qui ne change pas la nature de la série) convergent donc par linéarité et comparaison de séries à termes positifs la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge ;
5. $\sqrt{u_n u_{2n}} \leq \frac{u_n + u_{2n}}{2}$ et il suffit de montrer que $\sum u_{2n}$ converge pour conclure comme ci-dessus. Mais on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n u_{2k} \leq \sum_{k=0}^2 n u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

où la première inégalité vient de la positivité des termes de la suite (u_n) , et la dernière de la convergence de la série à termes positifs $\sum u_n$. On déduit que les sommes partielles de la série $\sum u_{2n}$ sont majorées, donc, comme il s'agit d'une série à termes positifs, celle-ci est convergente. Et on peut conclure comme au point précédent.

6. $\frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{u_n + (1/n^2)}{2}$ est on conclut par comparaisons de séries à termes positifs comme $\sum u_n$ converge (par hypothèse) et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (par critère de Riemann).

Autre méthode : on passe par les sommes partielles avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ pour majorer les sommes partielles :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{u_k}}{k} &= \langle (\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2}, \dots, \sqrt{u_n}), \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n} \right) \rangle \leq \|(\sqrt{u_1}, \dots, \sqrt{u_n})\| \cdot \left\| \left(\frac{1}{1}, \dots, \frac{1}{n} \right) \right\| \\ &= \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n u_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)} \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \right) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)} \end{aligned}$$

où les dernières sommes infinies sont bien définies et finies comme $\sum u_n$ converge (par hypothèse) et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (par critère de Riemann).

Pour les réciproques :

1. la réciproque est fausse : si $u_n = \frac{1}{n}$, alors $\sum u_n$ diverge mais $\sum u_n^2$ converge ;
2. si $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge, alors $\frac{u_n}{1+u_n}$ tend vers 0, et donc u_n tend vers 0, et on retrouve $u_n \sim \frac{u_n}{1+u_n}$ donc les séries ont même nature, et la réciproque est vraie ;
3. même méthode qu'en 2, et la réciproque est vraie ;
4. réciproque fausse : on prend $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 0 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$ de sorte que u_n ne tend pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement, alors que $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge, comme $\sqrt{u_n u_{n+1}}$ vaut toujours 0.
5. même contre-exemple, même conclusion.
6. la réciproque est fausse : si $u_n = \frac{1}{n}$, alors $\frac{\sqrt{u_n}}{n} = \frac{1}{n^{3/2}}$ qui est le terme général d'une série convergente (par Riemann), alors que $\sum u_n$ diverge (par Riemann également).

Exercice 3 [Natures de séries à termes positifs 3]

On fait des développements asymptotiques à la précision $\frac{1}{n^\alpha}$ pour un $\alpha > 1$ (souvent $\alpha = 2$), ce qui donne une erreur ne changeant pas la nature de la série.

1. $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} = (1-a) + \frac{1-b}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$ qui est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $(1-a) = 0 = (1-b)$, c'est-à-dire $a = b = 1$;
2. $\cos \frac{1}{n} - a - \frac{b}{n} = (1-a) - \frac{b}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$ qui est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $(1-a) = 0 = -b$, c'est-à-dire $a = 1$ et $b = 0$;
3. $\frac{1}{an+b} - \frac{c}{n} = \frac{(1-ac)n - bc}{n(an+b)} = \frac{1-ac}{an+b} - \frac{bc}{n(an+b)}$ qui est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $a \neq 0$ et $c = \frac{1}{a}$;
4. $\frac{a^n}{1+b^n}$: on cherche un équivalent suivant la valeur de b :
 - si $b > 1$: $\frac{a^n}{1+b^n} \sim \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ qui est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $a/b \in]-1; 1[$ (série géométrique), c'est-à-dire $a < b$;
 - si $b = 1$: $\frac{a^n}{1+b^n} = \frac{a^n}{2}$ qui est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $a < 1$, c'est-à-dire $a < b$;
 - si $b < 1$: $\frac{a^n}{1+b^n} \sim a^n$ qui est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $a < 1$.
 qu'on peut réunir en une seule condition : la série converge si, et seulement si, $a < \max(1, b)$.
5. $\text{Arctan}(n+a) - \text{Arctan}(n)$: on utilise deux méthodes :
 - par un développement asymptotique de Arctan en $+\infty$: on utilise que, pour tout $x > 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \frac{\pi}{2}$, et en utilisant le développement limité de Arctan en 0, on déduit que :

$$\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^3} + o(x^3)$$

et en réinjectant on déduit :

$$\text{Arctan}(n+a) - \text{Arctan}(n) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+a} + o\left(\frac{1}{(n+a)^2}\right) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{a}{n(n+a)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{a}{n^2}$$

et on a donc un terme général de série convergente, par critère de Riemann et comparaison à une série absolument convergente.

- par inégalité des accroissements finis : la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\text{Arctan}' : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ et donc par inégalité des accroissements finis appliquée entre n et $n+a$, il existe c_n entre n et $n+a$ tel que :

$$\text{Arctan}(n+a) - \text{Arctan}(n) = (n+a-n) \cdot \text{Arctan}'(c_n) = \frac{a}{1+c_n^2} \sim \frac{a}{n^2}$$

en utilisant que, par encadrement, on a : $c_n \sim n$.

6. $\frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+k)!}$: notons déjà que :

$$\frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!}$$

$$\text{avec } 0 \leq \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} = (n-2) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-2}{n(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $1! + 2! + \dots + n! \sim n!$. Et ainsi :

$$\frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+k)!} \sim \frac{n!}{(n+k)!} \sim \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \sim \frac{1}{n^k}$$

qui est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $k \geq 2$ (par critère de Riemann). Et au passage, avec l'équivalent montré au début, on a même la divergence grossière de la série pour $k = 0$, comme le terme général tend vers $1 \neq 0$.

7. $\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) = (1+a+b)\ln(n) + a\ln(1+1/n) + b\ln(1+2/n) = (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ qui est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $1+a+b=0=a+2b$, c'est-à-dire $a=-2$ et $b=1$.
8. $\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} = (1+a+b)\sqrt{n} + \frac{a+2b}{2\sqrt{n}} - \frac{a+4b}{8n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ qui est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $1+a+b=0=a+2b$, c'est-à-dire $a=-2$ et $b=1$;
9. $\frac{a}{\sqrt{3n+1}} + \frac{b}{\sqrt{3n+2}} + \frac{c}{\sqrt{3n+3}} = \frac{a+b+c}{\sqrt{3n}} - \frac{a+2b+3c}{6n\sqrt{3n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ qui est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $a+b+c=0$.

Exercice 4 [Critère de d'Alembert]

On considère $\sum u_n$ une série à termes non nuls, et on suppose que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

1. On suppose que $l < 1$. On applique la définition avec $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$: on note n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq l + \varepsilon = \frac{l+1}{2}$$

et une récurrence immédiate montre que l'on a alors :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq |u_{n_0}| \cdot \left(\frac{1+l}{2} \right)^{n-n_0}.$$

Mais $l \in [0; 1[$, donc $\frac{l+1}{2} \in [0; 1[- 1; 1[$ ce qui montre que la série de terme général $|u_{n_0}| \cdot \left(\frac{1+l}{2} \right)^{n-n_0}$ converge absolument (série géométrique de raison dans $] - 1; 1[$).

Par comparaison à une série absolument convergente (comparaison valable à partir d'un certain rang seulement), on déduit que $\sum u_n$ converge absolument.

2. On suppose que $l > 1$.

Si $l \in \mathbb{R}$. On applique la définition avec $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$: on note n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq l - \varepsilon = \frac{l+1}{2}$$

et une récurrence immédiate montre que l'on a alors :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \geq |u_{n_0}| \cdot \left(\frac{l+1}{2} \right)^{n-n_0}.$$

Mais $l \in]1; +\infty[$ donc $\frac{l+1}{2} > 1$ donc par divergence par minoration : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$. Donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $l = +\infty$, on fait de même en appliquant la définition avec $A = 2$, ce qui revient à remplacer les $\frac{l+1}{2}$ par 2 et les conclusions restent les mêmes.

3. On va montrer que tous les cas de figures sont possibles pour le cas où $l = 1$:

(a) divergence grossière : $u_n = n$ ou $u_n = 1$ conviennent ;

(b) divergence : $u_n = \frac{1}{n}$;

(c) semi-convergence : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

(d) convergence absolue : $u_n = \frac{1}{n^2}$.

Exercice 5 [Critère de Cauchy]

On fait exactement comme pour d'Alembert, en appliquant les définitions avec $\varepsilon = \pm \frac{l-1}{2}$ suivant la valeur de l . On trouve les mêmes résultats de convergence/divergence pour les premières questions.

Pour la dernière, on perd seulement la semi-convergence car la série $\sum u_n$ est à termes positifs, mais les autres exemples restent valables.

Exercice 6 [Puissance d'une série par une suite]

On note $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour n suffisamment grand :

$$1 - \frac{M}{\ln(n)} \leq v_n \leq 1 + \frac{M}{\ln(n)}.$$

Comme $\sum u_n$ converge, alors u_n tend vers 0, donc pour n suffisamment grand (tel que $u_n \leq 1$) on a :

$$0 \leq u_n^{v_n} = \exp(v_n \ln(u_n)) \leq \exp\left(\ln(u_n) - \frac{M \ln(u_n)}{\ln(n)}\right)$$

et on va contrôler le membre de droite de deux manières.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\exp\left(-\frac{M \ln(u_n)}{\ln(n)}\right) \leq e^\alpha \Leftrightarrow u_n \geq n^{-\alpha/M}$$

et ainsi en prenant $\alpha = 2M$:

— si $u_n \geq \frac{1}{n^2}$, alors $u_n^{v_n} \leq u_n \cdot e^{2M}$;

— sinon : notons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$: $\frac{M}{\ln(n)} \leq \frac{1}{4}$. Alors pour un tel n :

$$u_n^{v_n} \leq \exp\left(\ln(u_n) - \frac{M \ln(u_n)}{\ln(n)}\right) \leq \exp\left(\frac{3}{4} \ln(u_n)\right) = u_n^{3/4} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

et ainsi, on a à partir d'un certain rang :

$$u_n^{v_n} \leq \left(u_n e^{2M} + \frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

qui est le terme général d'une série convergente (comme $\sum u_n$ converge par hypothèse et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge par Riemann) à termes positifs. Donc par comparaison à une série convergente à termes positifs, la série $\sum u_n^{v_n}$ converge également.

Exercice 7 [Produit d'une suite par une puissance]

Par décroissance de (u_n) et croissance de la suite (n^α) , on a directement :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} n^\alpha u_{2n} = n^{\alpha+1} u_{2n}$$

ce qui prouve déjà l'inégalité demandée.

On utilise ensuite la convergence de la série $\sum n^\alpha u_n$: pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n k^\alpha u_k$, qui est le terme général d'une suite convergente (par convergence de la série évoquée), et en particulier :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_k = S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par différence de deux suites convergent vers la même limite finie (suite (S_n) et suite extraite).

On déduit déjà par théorème d'encadrement que $n^{\alpha+1} u_{2n}$ tend vers 0. Et on déduit ensuite que $n^{\alpha+1} u_n$ tend vers 0 en montrant que les suites extraites des termes de rangs pairs et de rangs impairs tendent vers 0, comme :

- si $n = 2k$ est pair : $n^{\alpha+1} u_n = (2k)^{\alpha+1} u_{2k} = 2^{\alpha+1} k^{\alpha+1} u_{2k}$ qui tend vers 0 quand k (donc n) tend vers $+\infty$;
- si $n = 2k + 1$ est impair : $0 \leq n^{\alpha+1} u_n = (2k + 1)^{\alpha+1} u_{2k+1} \leq (2k + 1)^{\alpha+1} u_{2k} \sim (2k)^{\alpha+1} u_{2k} = 2^{\alpha+1} k^{\alpha+1} u_{2k}$ qui tend vers 0 (même raisonnement que ci-dessus) puis par encadrement $(2k + 1)^{\alpha+1} u_{2k+1}$ tend également vers 0 pour k tendant vers $+\infty$.

D'où la limite demandée.

Exercice 8 [Suite récurrente à paramètre]

On procède par double implication :

- si la série $\sum u_n$ converge : alors (u_n) converge vers 0, donc (u_{n-1}) aussi, et ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

et par critère de Riemann, on déduit que nécessairement $\alpha > 1$;

- si $\alpha > 1$: la relation de récurrence impose directement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{e^{-u_{n+1}}}{n^\alpha} > 0$.

Puis en réinjectant :

$$\forall n \geq 2, 0 \leq u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha}$$

qui assure, par critère de Riemann et comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum u_n$ converge.

Et finalement la série converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 9 [Limite d'un produit]

On considère (u_n) une suite de réels strictement positifs, et on pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n}{(1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_n)}.$$

1. Calculons pour des petites valeurs de n la quantité de l'indication :

$$1 - \sum_{k=0}^0 v_k = 1 - v_0 = 1 - \frac{u_0}{1 + u_0} = \frac{1}{1 + u_0}$$

$$1 - \sum_{k=0}^1 v_k = 1 - v_0 - v_1 = \frac{1}{1 + u_0} - \frac{u_1}{(1 + u_0)(1 + u_1)} = \frac{1}{(1 + u_0)(1 + u_1)}$$

et on montre facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \sum_{k=0}^n v_k = \frac{1}{(1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_n)} = \frac{v_n}{u_n}.$$

On déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n)}$$

où, par stricte positivité des u_i , la suite de terme général $((1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n))$ est une suite strictement croissante positive. Donc la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$ est une suite croissante (par la monotonie évoquée ci-dessus) et majorée (par 1, comme de la forme $(1-\alpha_n)$ avec α_n à valeurs positives).

Donc la suite des sommes partielles de $\sum v_n$ converge par théorème de la limite monotone, c'est-à-dire que la série $\sum v_n$ converge.

2. Posons $V_n = \ln(U_n) = \sum_{k=0}^n \ln(1+u_k)$ qui est une suite à termes positifs (tous les u_i sont positifs, donc les $\ln(1+u_i)$ aussi). Et par continuité de $\ln$ et $\exp$, on déduit que la suite (U_n) converge si, et seulement si, la suite (V_n) converge, c'est-à-dire si, et seulement si, la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge.
 - si $\sum u_n$ converge : alors u_n tend vers 0, et ainsi $u_n \sim \ln(1+u_n)$ donc les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature (comparaison de séries à termes positifs), donc $\ln(1+u_n)$ converge, donc (U_n) converge ;
 - si (U_n) converge : alors $\sum \ln(1+u_n)$ converge, donc $\ln(1+u_n)$ tend vers 0, et par continuité de la fonction $\exp$ on déduit que $1+u_n$ tend vers 1, puis u_n tend vers 0. On a alors $u_n \sim \ln(1+u_n)$ donc les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ ont même nature, et finalement $\sum u_n$ converge.

D'où l'équivalence cherchée.

3. La série $\sum u_n$ étant à termes positifs, elle diverge si, et seulement si, elle tend vers $+\infty$. Il en est de même pour la suite (U_n) , qui est une suite croissante.

Or, on a prouvé que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n v_k = 1 - \frac{1}{U_n}.$$

Et finalement :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty \Leftrightarrow (U_n) \text{ diverge} \Leftrightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

ce qui montre l'équivalence cherchée.

Exercice 10 [Calcul de sommes]

1. $\frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+2}$ et par télescopage (sur deux indices) on déduit :

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+2k} = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}$$

donc la série converge et sa somme vaut $\frac{3}{4}$.

2. En utilisant que $\frac{1}{\tan(x)} - \frac{2}{\tan(2x)} = \tan(x)$, on déduit que : $\frac{1}{2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} - \frac{1}{2^{n-1} \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$ (formule valable pour $n \geq 2$) et par télescopage on déduit :

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k \tan\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)} = \frac{1}{2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} - \frac{1}{2 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} = \frac{4-\pi}{2\pi}$$

en notant que $2^{n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \sim \frac{1}{2^n \frac{\pi}{2^{n+1}}} \sim \frac{2}{\pi}$. Donc la série converge et sa somme vaut $\frac{4-\pi}{2\pi}$;

3. $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1}$ et par télescopage (sur deux indices) on déduit :

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1} = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}$$

donc la série converge et sa somme vaut $\frac{3}{4}$ (qu'on aurait pu voir en retrouvant la question 1., à un changement d'indice près) ;

4. $\ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$ et par télescopage (sur deux indices) on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(3)$$

donc la série converge et sa somme vaut $\ln(3)$.

5. $\text{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}\right)$ et en utilisant que $\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+ab}$,

avec ici $a = \text{Arctan}(n+1)$ et $b = \text{Arctan}(n)$, on déduit : $\text{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n)$ et par télescopage on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \text{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

donc la série converge et sa somme vaut $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 11 [Séries géométriques dérivées]

On considère $x \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. On pose $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$, qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1; 1[$. On a en effet que, par propriété des fonctions puissances, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (même sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$), et le résultat découle par composition avec la fonction $x \mapsto 1+x$, qui est également $\mathcal{C}^\infty$, et qui envoie $] -1; 1[$ sur $]0; 2[\subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in] -1; 1[, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

de sorte qu'on s'intéresse en fait à la série de terme général $\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$.

Si $x \in [0; 1[$: on considère $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \alpha$ et alors :

$$\forall t \in [0; x], |f^{(n+1)}(t)| = |\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)| \cdot |1+t|^{\alpha-n-1} \leq |\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)|$$

comme $\alpha - n - 1 \leq 0$.

Et donc par inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n , on trouve :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0; x]} |f^{(n+1)}(t)| \leq x^{n+1} \frac{|\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)|}{(n+1)!} \leq x^{n+1} \frac{k(k+1) \dots (k+n)}{(n+1)!}$$

en utilisant l'inégalité triangulaire, où on a choisi $k \in \mathbb{N}$ tel $k \geq |\alpha|$. Et la formule de Stirling ou le critère de d'Alembert permettent de voir que le terme de droite tend vers 0, ce qui montre par encadrement que la série à étudier converge vers $(1+x)^\alpha$. Par exemple, avec la formule de Stirling, on trouve :

$$x^{n+1} \frac{k(k+1) \dots (k+n)}{(n+1)!} = x^{n+1} \frac{(k+n)!}{(n+1)!(k-1)!}$$

$$\sim x^{n+1} \frac{(k+n)^{k+n} \sqrt{2\pi(k+n)}}{e^{k+n}} \frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1} \sqrt{2\pi(n+1)}} \frac{1}{(k-1)!} \sim \frac{n^{k-1}}{e^{k-1}(k-1)!} x^{n+1}$$

qui tend bien vers 0 par croissance comparées (comme $x \in [0; 1[$, et donc la décroissance exponentielle de x^{n+1} l'emporte sur la croissance polynomiale de n^{k-1}).

Si $x \in]-1; 0]$, on doit raffiner un peu les encadrements. On a pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \alpha$:

$$\forall t \in [x; 0], |f^{(n+1)}(t)| = |\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)| \cdot |1+t|^{\alpha-n-1} \leq k(k+1) \dots (k+n-1) \cdot (1+t)^{\alpha-n-1}$$

en prenant $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq |\alpha|$.

Par formule de Taylor avec reste intégral, on a par inégalité triangulaire :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \int_x^0 |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x-t|^n}{n!} dt$$

où on a inversé les bornes pour bien utiliser l'inégalité triangulaire (avec les bornes dans le bon sens). Et d'après l'expression précédente, on a pour tout $t \in [x; 0]$:

$$|f^{(n+1)}(t)| \frac{|x-t|^n}{n!} \leq \frac{k(k+1) \dots (k+n)}{n!} (1+t)^\alpha \left| \frac{x-t}{1+t} \right|$$

et la fonction $t \mapsto \frac{x-t}{1+t} = -1 + \frac{x+1}{1+t}$ est décroissante sur $[x; 0]$ (comme $1+x > 0$), s'annulant en x , et valant x en 0. Donc on déduit finalement que :

$$\forall t \in [x; 0], |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x-t|^n}{n!} \leq \frac{k(k+1) \dots (k+n)}{n!} |x|^n$$

et en intégrant on trouve que :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{k(k+1) \dots (k+n)}{n!} |x|^{n+1}$$

où le membre de droite tend vers 0 par croissances comparées.

Et finalement, pour tout $x \in]-1; 1[$, on a bien la convergence de la série à étudier vers $(1+x)^\alpha$.

Pour avoir la convergence absolue, on peut procéder de deux manières :

- utiliser le critère de d'Alembert, ou la formule de Stirling, pour montrer que l'on a bien convergence absolue ;
- ou se ramener à la convergence simple, en notant que pour $x \in]-1; 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left| \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n \right| \leq \frac{|\alpha|(|\alpha|+1) \dots (|\alpha|+n-1)}{n!} |x|^n = \frac{(-|\alpha|)(-|\alpha|-1) \dots (-|\alpha|-n+1)}{n!} (-|x|)^n$$

qui est le terme général d'une série convergente, puisqu'il s'agit de la série convergent vers $(1-|x|)^{-|\alpha|}$.

Et dans ces deux méthodes on montre bien l'absolue convergence.

2. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > \alpha$ on a :

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = 0$$

ce qui donne bien que les termes de la série à étudier sont nuls à partir d'un certain rang, et assure la convergence.

Sinon, considérons $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 1$. Si on note $k = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ (de sorte que $k > \alpha$), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n \geq k$ que :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \right| &= \left| \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k) \frac{(\alpha-(k+1))(\alpha-(k+2))\dots(\alpha-n+1)}{n!} \right| \\ &\geq \underbrace{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)|}_{=M>0} \cdot \left| \frac{(n-k+1)!}{n!} \right| \end{aligned}$$

en faisant apparaître la dernière factorielle en majorant chaque facteur (en valeur absolue) par l'entier qui suit. Le fait que $M > 0$ vient du fait que α n'est pas un entier naturel.

Finalement, on a minoré le terme général de la série à étudier par la suite (u_n) , définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = M \cdot \frac{(n-k)!}{n!} |x|^n$$

Mais pour tout $n \geq k$ on a :

$$u_n = M \frac{|x|^n}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \geq M \frac{|x|^n}{n^k}$$

qui tend vers $+\infty$ par croissances comparées (comme $|x| > 1$). Donc par divergence par minoration u_n tend vers $+\infty$ et la série considérée au départ diverge grossièrement.

3. On considère $\alpha \in \mathbb{Z}_-$ (avec $\alpha \neq 0$). On note $\alpha = -(k+1)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1; 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n &= \frac{(-k-1)(-k-2)\dots(-k-n)}{n!} x^n \\ &= (-1)^n \frac{(k+n)!}{k! n!} x^n \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\dots(k+n)}{k!} (-x)^n = \binom{n+k}{k} (-x)^n \end{aligned}$$

et par le résultat précédent, appliqué en changeant x en $-x$, on trouve donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(k+n)}{k!} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

ce qui donne par linéarité (en multipliant par $k!$ chaque membre) que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\dots(n+k-1)(n+k) x^n = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

Avec l'expression avec les coefficients binomiaux, on trouve :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

qui est aussi appelée formule du binôme négatif.

Pour $k = 1, 2, 3$, on trouve ainsi que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$$

ce qui donne en réindexant les deux dernières sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

et donc on obtient que l'on peut dériver sous le signe somme dans ce cas particulier : la somme de la série des dérivées est égale à la dérivée de la somme de la série (pour la série géométrique), et l'on peut itérer en dérivant un nombre arbitrairement grand de fois.

4. En notant $a_N X^N$ le monôme dominant de P , on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que : $P(n)x^n \sim a_N n^N x^n$. Et ainsi :

- si $|x| < 1$: par croissances comparées, on constate facilement que $P(n)x^n = O(1/n^2)$, qui est le terme général d'une série absolument convergente, donc la série $\sum P(n)x^n$ converge absolument ;
- si $|x| \geq 1$: alors $|a_N n^N x^n| \geq |a_N n^N|$ qui ne tend pas vers 0 (qui tend même vers $+\infty$ si P n'est pas constant), donc la série $\sum P(n)x^n$ diverge grossièrement.

Pour calculer la somme, posons pour tout $k \in \mathbb{N}$: $P_k = (X+1)(X+2) \dots (X+k)$ (avec la convention $P_0 = 1$). Alors la famille (P_k) est graduée : c'est une base de $\mathbb{C}[X]$.

Si on note $P = \sum_{k=0}^N \lambda_k P_k$, avec $N = \deg(P)$ (de sorte que $\lambda_N \neq 0$), alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :

$$P(n)x^n \sim \lambda_N P_N(n)x^n$$

Considérons donc $x \in]-1; 1[$. Alors par linéarité de la somme on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^N \lambda_k P_k(n)x^n \right) = \sum_{k=0}^N \lambda_k \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P_k(n)x^n \right) = \sum_{k=0}^N \frac{\lambda_k k!}{(1-x)^{k+1}}$$

qui est bien une fraction rationnelle en x (en tant que sommes de fractions rationnelles). Le seul pôle est 1 pour chaque fraction, d'ordre $k+1$ pour la k -ème fraction de la somme, donc un pôle d'ordre en fait exactement $N+1 = \deg(P)+1$ comme $\lambda_N \neq 0$.

5. **Application** : On est donc ramené au cas précédent, avec $P = X^3 - 2X^2 + 1$ et $x = \frac{1}{3}$. En raisonnant à chaque fois sur les coefficients dominants, on trouve que :

$$P = P_3 - 8P_2 + 13P_1 - 2P_0$$

et donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{3^n} = \frac{6}{(2/3)^4} - \frac{8 \cdot 2}{(2/3)^3} + \frac{13}{(2/3)^2} - \frac{2}{2/3} = \frac{21}{8}.$$

Exercice 12 [Encadrement d'une somme partielle]

Par décroissance sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto \frac{1}{t^{2/3}}$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{(k+1)^{2/3}} \leq \frac{1}{t^{2/3}} \leq \frac{1}{k^{2/3}}$$

et en intégrant entre k et $k+1$:

$$\frac{1}{(k+1)^{2/3}} < \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{2/3}} dt < \frac{1}{k^{2/3}}$$

où les inégalités sont strictes car $t \mapsto \frac{1}{t^{2/3}}$ n'est pas constante sur cet intervalle. Et en sommant pour k entre 1 et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^{2/3}} < \int_1^{n+1} \frac{1}{t^{2/3}} dt = \frac{(n+1)^{1/3} - 1}{3} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2/3}}$$

et avec $n = 10^9$ et $n = 10^9 - 1$ on déduit :

$$\frac{(10^9 + 1)^{1/3} - 1}{3} < \sum_{k=1}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}} < 1 + \frac{(10^9)^{1/3} - 1}{3}.$$

et en utilisant que $\frac{(10^9 + 1)^{1/3} - 1}{3} \geq \frac{(10^9)^{1/3} - 1}{3} = 333$ et $1 + \frac{(10^9)^{1/3} - 1}{3} = 334$, on déduit finalement :

$$\left\lfloor \sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} \right\rfloor = 333.$$

Exercice 13 [Comportement en 1 de la fonction ζ]

On procède par comparaison série-intégrale. Par stricte décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit pour tout $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt$$

et en sommant pour k entre 2 et $N \in \mathbb{N}$ (avec $N \geq 2$) :

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \int_2^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^N \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{N^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

et en passant à la limite pour N tendant vers $+\infty$ (comme $\alpha > 1$) :

$$\frac{2^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

que l'on étudie pour α tendant vers 1.

Par continuité de $t \mapsto 2^t$ sur $\mathbb{R}$, on a : $\lim_{\alpha \rightarrow 1} 2^{1-\alpha} = 2^0 = 1$ et donc :

$$\frac{2^{1-\alpha}}{\alpha-1} \underset{\alpha \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}$$

et par théorème d'encadrement (version équivalents) on déduit :

$$\zeta(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}.$$

Exercice 14 [Série construite à partir des sommes partielles]

La série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est à termes positifs : il suffit de montrer qu'elle est majorée.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^\alpha} dt \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

en utilisant la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ (comme $\alpha > 1$).

En sommant pour $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$ (pour $N \in \mathbb{N}^*$) on déduit :

$$\sum_{n=1}^N \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_0}^{S_N} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{S_N^{1-\alpha} - S_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \frac{S_0^{\alpha-1}}{\alpha-1}$$

ce qui prouve la majoration voulue, donc la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

Et on n'utilise pas que $\sum u_n$ diverge, car le résultat reste vrai si $\sum u_n$ converge : si on note $l > 0$ sa somme (car les u_n sont strictement positifs), on a alors $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \sim \frac{u_n}{l^\alpha} = O(u_n)$ et donc on a directement la convergence par comparaison à une série absolument convergente, et ce peu importe la valeur de α .

Exercice 15 [Équivalent de $\ln(n!)$ (sans Stirling)]

Par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a directement :

$$n \ln(n) - n + 1 = \int_1^n \ln(t) dt \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) = \sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln(t) dt = (n+1) \ln(n+1) - n$$

et en utilisant que :

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n) = \ln(n) + o(\ln(n)) \sim \ln(n)$$

on déduit par encadrement que : $\ln(n!) \sim n \ln(n)$.

Exercice 16 [Comparaison à une intégrale et paramètre]

Par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a directement :

$$\frac{2}{3} n^{3/2} = \int_0^n \sqrt{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{t} dt \leq \int_0^{n+1} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} (n+1)^{3/2}$$

et par encadrement : $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2}$.

On déduit que $u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n^\alpha} \sim \frac{2}{3} n^{3/2-\alpha}$ qui est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $\alpha - 3/2 > 1$ (par critère de Riemann), c'est-à-dire $\alpha > \frac{5}{2}$.

Exercice 17 [Développement asymptotique de la série harmonique]

1. On fait par comparaison série-intégrale : par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on trouve :

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt = 1 + \ln(n)$$

et on conclut sur l'équivalent demandé par encadrement.

2. Par définition :

$$v_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(1+1/n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) = \frac{2n^2 - 2n(n+1) + (n+1)}{2(n+1)n^2}$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente (par critère de Riemann). Donc la série $\sum v_n$ converge.

3. Par série télescopique, on déduit que la suite (u_n) converge. Si on note γ sa limite, alors $u_n = \gamma + o(1)$ ce qui donne bien $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

On aurait aussi pu montrer la convergence de (u_n) en étudiant sa monotonie : elle est décroissante, et minorée par 0 (par l'inégalité donnée en début d'exercice) donc converge.

Exercice 18 [Une suite définie implicitement]

On pose $f : x \mapsto \ln(x) - \operatorname{Arctan}(x)$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x(1+x^2)} < 0$$

en notant que les racines de $X^2 - X + 1$ sont non réelles.

Les limites ne donnent pas de formes indéterminées, et on déduit que f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, tout réel possède une unique antécédent par f : c'est le cas pour $n\pi$ (pour $n \in \mathbb{N}$) ce qui assure que (u_n) est bien définie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\operatorname{Arctan}(u_n) \in]-\pi/2; \pi/2[$. En réinjectant dans l'expression de u_n , on déduit :

$$e^{(n-1/2)\pi} < x < e^{(n+1/2)\pi}.$$

On déduit que :

$$0 < \frac{1}{u_n} < \frac{1}{e^{(n-1/2)\pi}}$$

qui est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison $e^{-\pi} \in [0; 1[$).

Et finalement la série $\sum \frac{1}{u_n}$ converge par comparaison à une série convergente à termes positifs.

Exercice 19 [Critère spécial des séries alternées]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = v_{2n+2} + v_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0 \text{ et } S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = v_{2n+3} + v_{2n+2} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$$

donc (S_{2n}) est décroissante et (S_{2n+1}) est croissante.

2. Notons déjà que, comme (u_n) est décroissante minorée (par 0), elle converge vers un réel $l \in \mathbb{R}_+$.

La série $\sum v_n$ converge si, et seulement si, la suite (S_n) converge. C'est le cas si, et seulement si, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite. Du fait de la monotonie, cela revient à ce que ces suites soient adjacentes, ce qui équivaut à ce que la différence tende vers 0. Mais on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} - S_{2n} = v_{2n+1} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -l$$

et finalement la série $\sum v_n$ converge si, et seulement si, la suite (u_n) tend vers 0.

Notons au passage que l'on a donc deux cas :

- soit (u_n) converge vers 0 : et $\sum v_n$ converge ;
- soit (u_n) tend vers $l \neq 0$: et $\sum v_n$ diverge grossièrement.

Et en cas de convergence, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, de limite commune $S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ donc par propriété des suites adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

3. On a $R_n = S - S_n$. On procède par disjonction de cas :

— si n est pair : on pose $n = 2k$ et en appliquant le résultat précédent :

$$S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k}$$

et en retranchant S_{2k} à chaque membre :

$$-u_{2k+1} \leq R_{2k} \leq 0$$

ce qui prouve bien que R_{2k} est du signe de $(-1)^{2k+1}$ avec $|R_{2k}| \leq u_{2k+1}$.

— si n est impair : on pose $n = 2k + 1$ et en appliquant le résultat précédent au rang suivant, on a :

$$S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k+2}$$

ce qui donne en retranchant S_{2k+1} à chaque membre :

$$0 \leq R_{2k+1} \leq u_{2k+2}$$

et à nouveau on trouve bien que R_{2k+1} est du signe de $(-1)^{2k+1+1}$ avec $|R_{2k+1}| \leq u_{2k+1+1}$.
D'où le résultat par disjonction de cas.

4. On a deux cas :

- si $\alpha \leq 0$: alors le terme général ne tend pas vers 0, et la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement ;
- si $\alpha > 0$: alors la suite de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est positive décroissante tendant vers 0 donc on a toutes les hypothèses, et par critère spécial des séries alternées la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 20 [La transformation d'Abel, ou généralisation des séries alternées]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $k \geq 1$ on a $v_k = V_k - V_{k-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k v_k &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^n u_k v_k = u_0 v_0 + \sum_{k=1}^n u_k (V_k - V_{k-1}) \\ &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^n u_k V_k - \sum_{k=1}^n u_k V_{k-1} \\ &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^n u_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} V_k \\ &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n - u_1 V_0 \\ &= u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k \end{aligned}$$

Chercher à interpréter des sommes comme des intégrales demanderait d'interpréter des suites comme des fonctions : la suite $(u_{n+1} - u_n)$ apparaît alors comme l'analogue de la dérivée de la suite (u_n) . Interprétée ainsi, la suite (v_k) apparaît comme la dérivée de la suite V_k , et on trouve une formule très proche de la formule d'intégration par parties.

2. Comme la suite (V_n) est bornée et que la suite (u_n) tend vers 0, on déduit déjà par encadrement que la suite $(u_n V_n)$ tend vers 0.

En notant M un majorant de la suite $(|V_n|)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|(u_{k+1} - u_k) V_k|}_{\leq 0} \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |u_k - u_{k+1}| = M \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = M(u_0 - u_n) \leq M u_0$$

en reconnaissant une somme télescopique.

On déduit que les sommes partielles de la série $\sum |(u_{n+1} - u_n) V_n|$ sont majorées, donc la série $\sum (u_{n+1} - u_n) V_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Par passage à la limite, on déduit que la série $\sum u_n v_n$ converge, comme la suite de ses sommes partielles converge. Notons en revanche qu'on n'a pas la convergence absolue de cette série pour autant, comme toutes les simplifications et les réécritures provenaient de télescopages, et que le passage à la valeur absolue empêcherait de regrouper ensemble ces mêmes termes pour simplifier la somme.

3. En posant $(v_n) = (-1)^n$, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \\ 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

ce qui donne bien que (V_n) est bornée, et on retrouve le critère des séries alternées.

4. Si $\sum v_n$ converge alors, en tant que suite convergente, la suite (V_n) de ses sommes partielles est bornée. La suite $(u_n) = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ étant positive décroissante tendant vers 0, on peut donc appliquer le critère précédent qui montre que la série $\sum u_n v_n = \sum \frac{v_n}{n^\alpha}$ converge.

5. Notons déjà que, si $\alpha > 1$, alors on a directement la convergence absolue (donc la convergence) par comparaison à une série de Riemann.

Pour les autres valeurs de α , on voudrait appliquer le critère d'Abel aux suites $v_n = \cos(n\theta)$ et $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. La suite (u_n) ainsi définie est bien positive décroissante tendant vers 0 (comme $\alpha > 0$). Reste à savoir quand les sommes partielles de (v_n) sont bornées.

On utilise pour cela que $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta})$, et donc on peut calculer les sommes partielles en les ramenant aux sommes de termes de suites géométriques. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \begin{cases} n+1 & \text{si } e^{i\theta} = 1 \\ \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} & \text{si } e^{i\theta} \neq 1 \end{cases}.$$

On distingue donc deux cas :

— si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$: alors $e^{i\theta} \neq 1$, et donc on a :

$$|V_n| = \left| \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) \right| \leq \frac{|1 - e^{i(n+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$$

donc (V_n) est bien bornée : on peut appliquer le critère d'Abel, qui donne que la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ converge. Le même argument (en prenant les parties imaginaires au lieu des parties réelles) montrerait de même que les séries $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ convergent pour tout $\alpha > 0$ pour ces mêmes valeurs de θ .

— si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$: alors $\cos(n\theta) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et donc on est ramené à étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, qui converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ par critère de Riemann.