Feuille d'exercices n^{o}27 : Déterminants

Exercice 1 [Matrices antisymétriques]

Si n est impair en A antisymétrique : $A = -A$ puis :

$$\det(A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$$

donc $\det(A) = 0$ et A n'est pas inversible.

Si n est pair, on pose $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors la famille $(-e_2, e_1, -e_4, e_3, \ldots, -e_n, e_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et sa matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est bien antisymétrique, et elle est inversible comme matrice d'une base dans une base (c'est une matrice de passage).

Exercice 2 [Déterminant d'une dérivation]

V_n contient la fonction nulle (en prenant le polynôme nul).

Si $f, g \in V_n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Notons $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $f : x \mapsto e^x P(x)$ et $g : x \mapsto e^x Q(x)$. Alors :

$$(\lambda f + \mu g) : x \mapsto \lambda e^x P(x) + \mu e^x Q(x) = e^x (\lambda P + \mu Q)(x) \in V_n$$

comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel, et donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Une fonction polynomiale et la fonction exp étant dérivable, par produit on déduit que $f \mapsto f'$ est bien définie sur V_n. La linéarité de la dérivation est déjà acquise. Reste à montrer qu'elle est à valeur dans V_n.

Soit $f \in V_n$. Notons $f : x \mapsto e^x P(x)$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors par dérivée d'un produit :

$$f' : x \mapsto e^x (P + P')(x)$$

et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ donc $P + P' \in \mathbb{R}_n[X]$. Et finalement $f' \in V_n$.

Donc c'est bien un endomorphisme de V_n.

Pour le déterminant, on constate que, avec la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, on déduit que la famille $\left(f_k : x \mapsto e^x x^k\right)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base de V_n. Et pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a :

$$f_k' : x \mapsto e^x \left(x^k + k x^{k-1}\right) = f_k + k f_{k-1}$$

donc la matrice de la dérivation dans cette base est triangulaire, avec uniquement des 1 sur la diagonale. Donc son déterminant est 1.

Exercice 3 [Déterminant d'une primitivisation]

Le fait que φ soit défini sur $\mathbb{R}_n[x]$ vient du fait que les applications polynomiales sont continues, donc on peut définir leurs intégrales sur tout segment.

La linéarité vient de la linéarité de l'intégration sur un segment : à x fixé, l'application $f \mapsto \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$ est linéaire, ce qui assure la linéarité de φ (image par image).

Reste à montrer que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable : soit $f \in \mathbb{R}_n[x]$. On écrit : $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Et alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(f)(x) = \int_x^{x+1} \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n a_k \int_x^{x+1} t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} \left((x+1)^{k+1} - x^{k+1} \right)$$

qui est une combinaison linéaire des $(x+1)^{k+1} - x^{k+1}$. Mais les polynômes $(X+1)^{k+1}$ et X^{k+1} sont tous les deux unitaires de degré $k+1$, donc leur différence est de degré au plus k (en fait exactement k comme on le montrera après). Donc $\varphi(f)$ est combinaison linéaires d'éléments de $\mathbb{R}_n[x]$, donc est bien un élément de $\mathbb{R}_n[x]$.

Donc φ est bien un endomorphisme.

Considérons la base $(f_k : x \mapsto x^k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ de $\mathbb{R}_n[x]$. Alors pour tout $k \in [\![0;n]\!]$:

$$\varphi(f_k) : x \mapsto \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1}$$

mais par binôme, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(x+1)^{k+1} - x^{k+1} = \left(\sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} x^l \right) - x^{k+1} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k+1}{l} x^l$$

et donc :

$$\varphi(f_k) = \sum_{l=0}^{k} \frac{\binom{k+1}{l}}{k+1} f_l$$

donc la matrice de φ dans la base des f_k est triangulaire, avec sur la diagonale des $\dfrac{\binom{k+1}{k}}{k+1} = 1$.

Et donc son déterminant est 1.

Exercice 4 [Déterminant de la multiplication matricielle]

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on s'intéresse à l'application $\varphi \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)$ définie par : $\varphi : M \mapsto A \cdot M$.

1. On a directement l'équivalence, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $C_1, \dots, C_n$:

$$M \in \mathrm{Ker}\varphi \Leftrightarrow AM = 0 \Leftrightarrow \forall i,\ AC_i = 0 \Leftrightarrow \forall i,\ C_i \in \mathrm{Ker}A$$

   et donc $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}A = \{0\}$, ce qui donne bien l'équivalence par caractérisation des endomorphismes inversibles en dimension finie et des matrices inversibles.

2. Si on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, alors $\varphi(E_{i,j})$ est la matrice dont la j-ème colonne est C_i, et les autres coefficients sont nuls. C'est-à-dire :

$$\varphi(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}$$

3. On a directement pour matrice une diagonale en blocs de A :

$$\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}$$

   dont le déterminant est $\det(A)^n$.

4. On a donc $\det(\varphi) = \det(A)^n$. Et donc $\det(\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$, ce qui est bien le premier résultat.

Exercice 5 [Calculs de déterminants]

On fait à chaque fois par pivot. On bouge le 1 en première ligne pour simplifier les étapes.

1. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & -51 & -37 \\ 0 & -14 & -6 \end{vmatrix} = 51 \times 6 - 37 \cdot 14 = -212$;
2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 11 \end{vmatrix} = 28$;
3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$;
4. on fait $L_1 = L_1 - L_3$ pour mettre un pivot à 1 : $\begin{vmatrix} 24 & -21 & 13 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 27 & -11 \end{vmatrix} =$ $66 - 54 = 12$;
5. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & -1+2a & 2 \\ 0 & 2a & 2 \end{vmatrix} = -2$;
6. si a, b ou c est nul : la matrice a directement deux colonnes proportionnelles et le déterminant est nul. Sinon : $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ b & c & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & c & -bc/a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = 2abc$ (et donc la formule est valable peu importe les valeurs de a et b. Autre méthode : Sarrus est efficace ici comme il y a beaucoup de 0, et on trouve comme déterminant : $abc + abc + 0 + 0 + 0 + 0 = 2abc$;
7. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^2 + c^3 - 3abc$ (directement par Sarrus) ;
8. on développe tout par n-linéarité. On aura une somme de déterminants de la forme :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}$$

pour $\alpha \in \{a, b\}$, $\beta \in \{b, c\}$ et $\gamma \in \{a, c\}$. Les seuls non nul seront :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix}$$

(tous les autres sont nuls car deux colonnes sont égales) et ces termes sont égaux, avec :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

Et finalement : $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$

Autre méthode : on retranche la première colonne aux deux autres, puis les ajoute à la première. On obtient pareil.

9. On retranche la première colonne aux autres et on fait apparaître les formules de factorisation :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(a) & \cos(b)-\cos(a) & \cos(c)-\cos(a) \\ \sin(a) & \sin(b)-\sin(a) & \sin(c)-\sin(a) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(a) & -2\sin\frac{b+a}{2}\sin\frac{b-a}{2} & -2\sin\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2} \\ \sin(a) & 2\cos\frac{b+a}{2}\sin\frac{b-a}{2} & 2\cos\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2} \end{vmatrix}$$
$$= -4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(a) & \sin\frac{b+a}{2} & \sin\frac{c+a}{2} \\ \sin(a) & \cos\frac{b+a}{2} & \cos\frac{c+a}{2} \end{vmatrix} = 4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{c-b}{2}$$
10. on fait un pivot ou on développe sur la première colonne :
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2-120 = -118\,;$$
11. On fait par pivot. On commence par retrancher 3 fois la troisième ligne à la quatrième, puis 2 fois la deuxième à la troisième puis une fois la première à la deuxième. On simplifie, et on recommence :
$$\begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! \\ 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! \\ 0 & 1! & 2\cdot 2! & 3\cdot 3! \\ 0 & 2! & 2\cdot 3! & 3\cdot 4! \\ 0 & 3! & 2\cdot 4! & 3\cdot 5! \end{vmatrix} = 3!\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \\ 3! & 4! & 5! \end{vmatrix} = 3!\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 0 & 2! & 2\cdot 3! \\ 0 & 3! & 2\cdot 4! \end{vmatrix} = 6\cdot(96-72) = 144\,;$$
12. On peut procéder par pivot :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & a^2-1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & a^3-1 \end{vmatrix} = (a-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & a+1 \\ 1 & a+1 & a^2+a+1 \end{vmatrix} = (a-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & a^2+a \end{vmatrix} = a^3(a-1)^3$$
et c'est encore plus efficace en retranchant à chaque ligne a fois la précédente en partant de la dernière (comme un déterminant de Vandermonde) ce qui donne le même résultat.
13. On retranche des colonnes pour faire apparaître des 0 et on développe :
$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & 0 & b-a \\ c & a & b-a & 0 \\ c & b & a-b & 0 \\ b & c & 0 & a-b \end{vmatrix} = (b-a)^2\begin{vmatrix} a & c & 0 & 1 \\ c & a & 1 & 0 \\ c & b & -1 & 0 \\ b & c & 0 & -1 \end{vmatrix} = (b-a)^2\begin{vmatrix} a & c & 0 & 1 \\ c & a & 1 & 0 \\ 2c & b+a & 0 & 0 \\ b+a & 2c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(b-a)^2\begin{vmatrix} c & a & 1 \\ 2c & b+a & 0 \\ b+a & 2c & 0 \end{vmatrix} = -(b-a)^2\begin{vmatrix} 2c & b+a \\ b+a & 2c \end{vmatrix} = (b-a)^2((b+a)^2-4c^2) = (a-b)^2(a+b-2c)(a+b+2c).$$

Exercice 6 [Recherche de bases]

On calcule à chaque fois le déterminant dans la base canonique :

1. $\begin{vmatrix} 1+i & i & -2+i \\ 1 & -1 & 0 \\ i & 1-i & -i \end{vmatrix} = -4+2i \neq 0$ donc c'est une base.
2. $\begin{vmatrix} \lambda+3 & 2\lambda+3 \\ 3\lambda+1 & 5\lambda+4 \end{vmatrix} = -\lambda^2+8\lambda+9 = -(\lambda+1)(\lambda-9)$ et c'est donc une base si, et seulement si, $\lambda \notin \{-1;9\}$.
3. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -49 \neq 0$ donc c'est une base de E.

4. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc c'est une base de E.

5. $\begin{vmatrix} ab & ac & bc \\ -(a+b) & -(a+c) & -(b+c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ et c'est donc une base si, et seulement si, a, b, c sont deux-à-deux distincts.

Exercice 7 [Introduction de variable pour un calcul de déterminant]

On retranche la première colonne à toutes les autres. La variable x n'apparaît que dans la première colonne (les autres coefficients sont constants). En développant suivant la première colonne, on déduit que Δ est une combinaison linéaire en les coefficients de la première colonne, et c'est donc bien une fonction affine.

On évalue en $-b$ et en $-a$ pour faire apparaître des matrices triangulaires donc les déterminants se calculent plus facilement. On trouve ainsi :

$$\Delta(-b) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - b) \text{ et } \Delta(-a) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - a)$$

et on revient à l'expression générale d'une fonction affine comme on la connaît en deux points (comme $a \neq b$ par hypothèse). Ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta(x) = \frac{\Delta(-b) - \Delta(-a)}{-b+a}(x+a) + \Delta(-a)$$

et en évaluant en 0 on déduit :

$$\delta = \Delta(0) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - b) - \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - a)}{a-b} \cdot a + \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - b) = \frac{a \cdot \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - b) - b\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - a)}{a-b}.$$

Exercice 8 [Calculs de déterminants par relations de récurrence]

On effectue l'opération suggérée. On note à chaque fois D_n le déterminant à calculer pour la matrice de taille n.

1. On ajoute la dernière ligne/colonne à la première, et on développe suivant la première colonne puis ligne, et on trouve la relation : $D_{n+2} = D_n$. Comme $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$, on déduit : $D_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.
2. On retranche la dernière ligne/colonne à la première, et on développe suivant la première colonne puis ligne et on trouve la relation : $D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$. Comme $D_1 = 0$ et $D_2 = -1$, on déduit : $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.
3. Si n est impair, il faudrait $a = b$ (problème au coefficient central sinon), et alors le déterminant est nul (car les première et dernière colonnes sont égales). Pour n pair, on développe suivant la première colonne, puis suivant la dernière colonne et on trouve la relation : $D_{n+2} = (a^2 - b^2)D_n$. Et avec $D_2 = a^2 - b^2$ on déduit : $D_{2n} = (a^2 - b^2)^n$.
4. On coupe la dernière colonne en $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$ ce qui donne la relation : $D_n = (n-1)! + nD_{n-1}$ et en divisant par $n!$: $\dfrac{D_n}{n!} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{D_{n-1}}{(n-1)!}$. En sommant ces relations on déduit : $D_n = (1 + H_n)n!$.

5. On découpe la première ligne en :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b & \dots & b \end{pmatrix}$$

ce qui donne la relation : $D_n = aD_{n-1} + b^n$. Et on a finalement :

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \text{ si } a \neq b \text{ et } D_n = (n+1)a^n \text{ sinon .}$$

Exercice 9 [Déterminant de Vandermonde]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On leur associe la quantité :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ de deux manières différentes.

   Méthode 1 : avec des polynômes :
   - si $n = 1$: alors $V(x_1) = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1$, qui vérifie bien la formule car on trouve le produit vide (qui vaut 1) ;
   - si $n = 2$: alors :

     $$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

     qui correspond bien à la formule ;
   - supposons le résultat acquis jusqu'au rang n pour $n \in \mathbb{N}^*$, et considérons $x_1, \dots, x_{n+1}$. On souhaite calculer $V(x_1, \dots, x_{n+1})$.

     Notons déjà que, si deux des x_i sont égaux, alors la matrice qui définit le déterminant de Vandermonde a deux colonnes égales, donc n'est pas inversible, et l'égalité à montrer est vraie (les deux membres sont nuls).

     Si les x_i sont deux-à-deux distincts, posons l'application P définie sur $\mathbb{K}$ par :

     $$P : x \mapsto V(x_1, \dots, x_n, x)$$

     de sorte que l'on veut calculer $P(x_{n+1})$.

     En développant suivant la dernière colonne, on a pour tout $x \in \mathbb{K}$:

     $$\begin{aligned} P(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} = (-1)^{n+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \\ & +(-1)^{n+3} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} + \dots + \underbrace{(-1)^{2n+2} \cdot x^n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{V(x_1, \dots, x_n)x^n} \end{aligned}$$

     Et ainsi la fonction P est une fonction polynomiale. Plus précisément :

— son monôme dominant est $V(x_1, \dots, x_n) \cdot x^n$;
— $x_1, \dots, x_n$ sont des racines de P.

Et ainsi, on déduit que P est scindé, car, comme tous les x_i sont distincts, P a au moins autant de racines que son degré.

Et finalement on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = V(x_1, \dots, x_n, x) = V(x_1, \dots, x_n) \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

et ainsi, par hypothèse de récurrence, en évaluant en $x = x_{n+1}$ on trouve bien :

$$V(x_1, \dots, x_{n+1}) = V(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j = n+1} (x_j - x_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)$$

ce qui conclut la récurrence.

Méthode 2 : par opérations élémentaires sur les colonnes :
— si $n = 1$ ou 2 : on procède comme ci-dessus ;
— supposons le résultat acquis jusqu'au rang n pour $n \in \mathbb{N}^*$, et considérons $x_1, \dots, x_{n+1}$. On considère la matrice associée aux x_i, et on effectue dans cet ordre les opérations suivantes sur les lignes :

$$L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - x_1 L_n,\ L_n \leftarrow L_n - x_1 L_{n-1}, \dots, L_3 \leftarrow L_3 - x_1 L_2,\ L_2 \leftarrow L_2 - x_1 L_1$$

ce qui donne :

$$V(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_{n+1} - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & \dots & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} & \dots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_{n+1} - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) & x_3^{n-1}(x_3 - x_1) & \dots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{vmatrix}$$

et en sortant les $(x_i - x_1)$ (qui multiplient les différentes colonnes, par n-linéarité du déterminant) puis en développant suivant la première colonne, on déduit :

$$V(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_{n+1} - x_1)(x_n - x_1) \dots (x_3 - x_1)(x_2 - x_1) V(x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$$

et on conclut comme à la première preuve.

2. La matrice de φ dans les bases canonique est directement la matrice dont on calcule le déterminant. On déduit que φ est un isomorphisme si, et seulement si, $V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Par la formule prouvée ci-dessus, et par règle du produit nul, on déduit que φ est inversible si, et seulement si, tous les x_i sont différents (ce qu'on a avait déjà montré dans les exercices d'algèbre linéaire en dimension finie).