Feuille d'exercices n^{o}12 : L'ensemble ordonné des réels

Exercice 1 [Recherche de bornes supérieures et inférieures]
Montrer que les ensembles suivants sont bornés, et déterminer leurs bornes inférieures et supérieures :

1. $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$; 2. $B = \left\{(-1)^n + \frac{1}{m} \,|\, n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$; 3. $C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \,|\, n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 2 [Compatibilité de l'ordre et des bornes]
Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leqslant b$. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent, et que : $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

Exercice 3 [Bornes supérieures d'unions et d'intersections]
On suppose que A et B sont deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est majorée, et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cap B$ est majorée et que $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$. Donner une situation où l'inégalité est stricte.
3. On pose : $A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et que : $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 4 [Borne supérieure d'un sous-ensemble]
Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

1. Soit $B = A \cap [\sup(A) - 1; +\infty[$. Déterminer $\sup(B)$.
2. Soit $x \in A$ tel que $\sup(A) \neq x$. Déterminer $\sup(A \setminus \{x\})$ (on pourra commencer par montrer que cet ensemble est non vide).

Exercice 5 [Ensembles adjacents]
Deux parties A, B non vides de $\mathbb{R}$ sont dites adjacentes si :

$$\left\{\begin{array}{r} \forall (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists (a,b) \in A \times B, b - a \leqslant \varepsilon \end{array}\right.$$

Montrer que dans ce cas $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et sont égaux.

Exercice 6 [Fonctions additives et fonctions linéaire]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Montrer que l'on a l'équivalence :

$$f \text{ est linéaire} \Leftrightarrow f \text{ est continue} \Leftrightarrow f \text{ est monotone}$$

et donner f dans ce cas.

Exercice 7 [Fonction additive et multiplicative sur les réels]
On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(xy) = f(x)f(y).$$

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$.
2. Montrer que f est impaire, et en déduire $f(-1)$.
3. Déterminer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. On pourra commencer par calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$ puis pour $x \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que : si $x \geqslant 0$, alors $f(x) \geqslant 0$.
5. En déduire que f est croissante, puis en déduire f.

Exercice 8 [Fonction croissante et point fixe]
Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ croissante. On souhaite montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $a \in [0;1]$ tel que $f(a) = a$.

On pose $A = \{x \in [0;1] \mid f(x) \geqslant x\}$.

1. Justifier que $a = \sup(A)$ est bien défini.
2. On suppose que $f(a) \geqslant a$: montrer que $f(a) \in A$.
3. On suppose que $f(a) \leqslant a$: montrer que $f(a)$ est un majorant de A.
4. Conclure.