

## Feuille d'exercices n°11 : Applications

### Exercice 1 [Images directes]

Déterminer  $f(I)$  dans les cas suivants :

1.  $f = \exp$  et  $I = ]-1; 0]$ ;
2.  $f = \ln$  et  $I = ]0; 1[$ ;
3.  $f : x \mapsto 1 + x^2$  et  $I = ]-2; 4]$ ;
4.  $f = \sin$  et  $I = [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ ;
5.  $f = \sin$  et  $I = ]\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}[$ ;
6.  $f = \cos$  et  $I = [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ .

### Exercice 2 [Images réciproques]

Déterminer  $f^{-1}(I)$  dans les cas suivants :

1.  $f = \exp$  et  $I = ]-1; 1[$ ;
2.  $f = \ln$  et  $I = ]1; +\infty[$ ;
3.  $f : x \mapsto 1 + x^2$  et  $I = [2; 5[$ ;
4.  $f = \sin$  et  $I = \{\frac{1}{2}\}$ ;
5.  $f = \sin$  et  $I = ]0; \frac{1}{2}[$ ;
6.  $f = \cos$  et  $I = [-1; 1[$ .

**Exercice 3 [Étude d'une fonction par une composée]** On considère  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $c \neq 0$  et  $a^2 + bc \neq 0$ . On pose  $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ .

1. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx-a}$  est bien définie sur  $E$ .
2. Montrer que la composée  $f \circ f$  est bien définie sur  $E$ .
3. Exprimer  $f \circ f(x)$  pour tout  $x \in E$ , et en déduire  $f(E)$ .

### Exercice 4 [Quelques exemples d'applications]

Dire si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

1.  $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto n + 1 \end{cases} ;$
2.  $g : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z} \\ n & \mapsto n + 1 \end{cases} ;$
3.  $h : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (n, m) & \mapsto (n - m, n + m) \end{cases} ;$
4.  $k : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x - y, x + y) \end{cases} ;$
5.  $l : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{2x}{1 + x^2} \end{cases} ;$
6.  $m : \begin{cases} [-1; 1] & \rightarrow [-1; 1] \\ x & \mapsto \frac{2x}{1 + x^2} \end{cases} ;$
7.  $n : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x + 1}{x - 1} \end{cases} ;$
8.  $p : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto \frac{x + 1}{x - 1} \end{cases} ;$

En cas de non-surjectivité, décrire simplement l'image de la fonction.

### Exercice 5 [Compositions et bijections 1]

Soient  $E, F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$ . On suppose que  $f \circ g \circ f$  est bijective.

Montrer que  $f$  et  $g$  sont bijectives.

### Exercice 6 [Compositions et bijections 2]

Soient  $E, F, G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$  et  $h : G \rightarrow E$ . On suppose que :

- $h \circ g \circ f$  est injective ;
- $g \circ f \circ h$  et  $f \circ h \circ g$  sont surjectives.

Montrer que  $f, g, h$  sont bijectives.

**Exercice 7 [Compositions et injections]**

Soient  $E, F, G$  trois ensembles et  $g : F \rightarrow G$ .

Montrer que  $g$  est injective si, et seulement si :  $\forall f_1, f_2 : E \rightarrow F, g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$ .

**Exercice 8 [Compositions et surjections]**

Soient  $E, F, G$  trois ensembles et  $f : E \rightarrow F$ . On suppose que  $G$  possède au moins deux éléments.

Montrer que  $f$  est surjective si, et seulement si :  $\forall g_1, g_2 : F \rightarrow G, g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$ .

**Exercice 9 [Application idempotente]**

Soient  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow E$  telle que  $f \circ f = f$ . Montrer l'équivalence :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

et préciser ce que vaut  $f$  dans ce cas.

**Exercice 10 [Application produit]**

Soient  $E, F, G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $g : E \rightarrow G$ . On définit l'application  $h : E \rightarrow F \times G$  par :  $\forall x \in E, h(x) = (f(x), g(x))$ .

1. On suppose que  $f$  ou  $g$  est injective. Montrer que  $h$  est injective.
2. On suppose que  $f$  et  $g$  sont surjectives :  $h$  est-elle surjective ?

**Exercice 11 [Fonctions sur les parties 1]**

On considère  $A, B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . On définit l'application  $f$  suivante :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{cases} .$$

1. Montrer que  $f$  est injective si, et seulement si :  $A \cup B = E$ .
2. Montrer que  $f$  est surjective si, et seulement si :  $A \cap B = \emptyset$ .
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur  $A$  et  $B$  pour que  $f$  soit bijective.

**Exercice 12 [Fonctions sur les parties 2]**

On considère  $A, B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . On définit l'application  $f$  suivante :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & (X \cup A, X \cup B) \end{cases} .$$

1. Montrer que  $f$  n'est pas surjective.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $A$  et  $B$  pour que  $f$  soit injective.

**Exercice 13 [Caractérisation de l'injectivité et surjectivité par les parties]**

Soit  $f : E \rightarrow F$  :

1. Montrer que pour tous  $A, A' \in \mathcal{P}(E) : f(A) \subset f(A') \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(f(A'))$ .
2. En déduire que  $f$  est injective si, et seulement si :  $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$ .
3. Montrer que pour tous  $B, B' \in \mathcal{P}(F) : f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B') \Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) \subset B'$ .
4. En déduire que  $f$  est surjective si, et seulement si :  $\forall B \in \mathcal{P}(F), B = f(f^{-1}(B))$ .

**Exercice 14 [Caractérisation de la bijectivité par les parties]**

Soit  $f : E \rightarrow F$ . Montrer que  $f$  est bijective si, et seulement si :  $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ .