Feuille d'exercices n^{o}10 : Ensembles

Exercice 1 [Caractérisation de l'inclusion 1]
Soient X, Y, Z trois ensembles. Montrer que :

1. $X \subset Y \Leftrightarrow \overline{Y} \subset \overline{X}$;
2. $X \subset (Y \cap Z) \Leftrightarrow [X \subset Y \text{ et } X \subset Z]$;
3. $(Y \cup Z) \subset X \Leftrightarrow [Y \subset X \text{ et } Z \subset X]$.

Exercice 2 [Caractérisation de l'inclusion 2]
Soient X, Y deux ensembles. Montrer que $X \subset Y$ si, et seulement si, il existe un ensemble Z tel que $Z \cap X \subset Z \cap Y$ et $Z \cup X \subset Z \cup Y$. Et montrer alors que c'est le cas pour tout ensemble Z.

Exercice 3 [Caractérisation de l'inclusion 3]
Soient X, Y deux ensembles. Montrer que :

1. $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$;
2. $X = Y \Leftrightarrow X \cup Y = X \cap Y$.

Exercice 4 [Simplification d'opérations sur les ensembles]
Soient A, B, C trois ensembles. On définit les ensembles X et Y par :

$$X = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \text{ et } Y = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A).$$

Montrer que $X = Y$.

Exercice 5 [Une autre version du produit cartésien]
Soit E un ensemble. Montrer l'équivalence :

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \Leftrightarrow (x = x') \text{ et } (y = y').$$

Et en déduire que le produit cartésien $E \times E$ s'identifie à : $\{\{\{x\}, \{x, y\}\} \,|\, x, y \in E\}$.

Exercice 6 [Inclusions des ensembles de quadrilatères]
On considère Q l'ensemble des quadrilatères, et ses sous-ensembles P, R, L, C respectivement composés des parallélogrammes, des rectangles, des losanges et des carrés.

Préciser les inclusions qui existent entre les ensembles P, R, L, C, et les représenter sur un même diagramme de Venn.

Exercice 7 [Différence symétrique 1]
On considère E un ensemble, et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

1. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;
2. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;
3. $(A \Delta B) \cup (A \Delta C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

Et représenter chacun de ces ensembles sur un diagramme de Venn.

Exercice 8 [Différence symétrique 2]
Soient E un ensemble, et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

1. $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$;
2. $A\Delta B = A\cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$.

Exercice 9 [Équivalence d'égalités]
Soient E un ensemble, et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$A\cap B = A\cap C \Leftrightarrow A\cap \overline{B} = A\cap \overline{C}.$$

Exercice 10 [Unions, intersections et parties]
Soient E, F deux ensembles.

1. Montrer que : $E\subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E)\subset \mathcal{P}(F)$.
2. Montrer que : $\mathcal{P}(E\cap F) = \mathcal{P}(E)\cap \mathcal{P}(F)$.
3. Quel est le lien entre $\mathcal{P}(E\cup F)$ et $\mathcal{P}(E)\cup \mathcal{P}(F)$?

Exercice 11 [Unions, intersections et produits cartésiens]
On considère E, F deux ensembles, $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(F)$.

1. Montrer que : $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2) = (A_1\cap A_2)\times(B_1\times B_2)$.
2. Montrer que $(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_1) = (A_1\cup A_2)\times B_1$
3. Quel est le lien entre $(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)$ et $(A_1\cup A_2)\times(B_1\cup B_2)$?

Exercice 12 [Représentation d'ensembles]
Représenter les ensembles suivants :

1. $F = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 2x+3y = 6\}$;
2. $G = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 2x+3y < 6\}$;
3. $H = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leqslant 9\}$;
4. $H\setminus G$;
5. $F\cap H$;
6. $G\cap H$.

Exercice 13 [Ensembles et parties]
On se propose de montrer qu'il n'existe aucun ensemble E tel que $\mathcal{P}(E)\subset E$. Par l'absurde, on suppose qu'un tel ensemble existe.

1. Expliquer en quoi consiste alors l'ensemble $A = \{x\in E \,|\, x\notin x\}$.
2. Justifier l'équivalence : $A\in A \Leftrightarrow A\notin A$.
3. En déduire que E n'existe pas.
4. Montrer en quoi ce résultat assure que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.