Nom :

Interrogation 9

Exercice 1 On considère $a, b \in \mathbb{C}$ et c une fonction continue sur un intervalle I. Énoncer le théorème de Cauchy–Lipschitz pour l'équation : $(E) : y'' + ay' + by = c$.

Soient $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$ et $x_0 \in I$. Alors le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + ay' + by & = & c \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \end{array} \right.$$

admet une unique solution.

Exercice 2

Soient b_1, b_2 donc fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $b = \lambda b_1 + \mu b_2$. On note $a_n, \dots, a_0$ des fonctions définies sur I et on pose $(E) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$. Énoncer le principe de superposition associé.

Posons les équations différentielles :

$$\begin{array}{lcl} (E_1) & : & a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_1 \\ (E_2) & : & a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_2 \end{array}.$$

Si f_1 est une solution de (E_1) et f_2 est une solution de (E_2), alors $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ est une solution de (E).

Exercice 3

Donner une solution particulière de l'équation : $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.

On a une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, de polynôme caractéristique :

$$X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$$

et ainsi 2 est racine simple du polynôme caractéristique : on cherche une solution de la forme $f : x \mapsto \lambda x e^{2x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Un tel f est infiniment dérivable (par produit et composée) avec :

$$f' : x \mapsto \lambda(2x+1)e^{2x} \text{ et } f'' : x \mapsto \lambda(4x+4)e^{2x}$$

et ainsi f est solution si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda\left(4x + 4 - 6x - 3 + 2x\right)e^{2x} = \lambda e^{2x} = e^{2x}$$

c'est-à-dire $\lambda = 1$.

Ainsi : $x \mapsto x e^{2x}$ est solution.

Exercice 4 Donner les solutions réelles de l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 0$.

On a une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est :

$$X^2 + 2X + 2 = (X+1)^2 + 1$$

qui a pour racines $-1 \pm i$. Les solutions générales sont les $x \mapsto \lambda e^{(-1+i)x} + \mu e^{(-1+i)x}$ (pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$), et les solutions réelles forment l'ensemble :

$$\left\{x \mapsto e^{-x} \left(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)\right) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 5 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $xy' + (1 - 2x^2)y = x$ et résoudre le problème de Cauchy associé de condition initiale $y(1) = 37 \cdot e - \dfrac{1}{2}$.

Comme on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation est équivalente à : $y' + \dfrac{1-2x^2}{x} y = 1$.

On résout l'équation homogène : $y' + \dfrac{1-2x^2}{x} y = 0$: une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1-2x^2}{x} = \dfrac{1}{x} - 2x$ est $x \mapsto \ln(x) - x^2$. Les solutions de l'équation homogène sont les :

$$x \mapsto \lambda e^{-\ln(x) + x^2} = \lambda \frac{e^{x^2}}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution par variation de la constante. Posons $f : x \mapsto \lambda(x) \dfrac{e^{x^2}}{x}$ pour λ fonction dérivable. Alors f est solution si, et seulement si, λ est une primitive de :

$$x \mapsto \frac{x}{e^{x^2}} = xe^{-x^2} = -\frac{1}{2} \cdot (-2x) e^{-x^2}$$

donc $\lambda : x \mapsto -\dfrac{1}{2} e^{-x^2}$ convient. Donc une solution particulière est :

$$x \mapsto -\frac{1}{2} e^{-x^2} \frac{e^{x^2}}{x} = -\frac{1}{2x}$$

Conclusion : les solutions de l'équation forment l'ensemble :

$$S = \{x \mapsto \lambda \frac{e^{x^2}}{x} - \frac{1}{2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Considérons f solution de l'équation. Posons $f : x \mapsto \lambda \dfrac{e^{x^2}}{x} - \dfrac{1}{2x}$. Alors f est solution du problème de Cauchy si, et seulement si :

$$f(1) = \frac{\lambda e}{1} - \frac{1}{2} = 37 \cdot e - \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire $\lambda = 37$. Donc l'unique solution au problème de Cauchy considéré est :

$$x \mapsto 37 \frac{e^{x^2}}{x} - \frac{1}{2x}.$$