Interrogation 21 : entraînement

Exercice 1 Donner les développements limités (aux ordres demandés en les points considérés) suivant :

1. $\sin(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0 ;
2. $\mathrm{ch}(x)$ à l'ordre $2n$ en 0 ;
3. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0 ;
4. $\sqrt{x}$ à l'ordre 2 en 3.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère F le plan d'équation $x+y+z=0$ et $G = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, et donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. On note p le projecteur sur F parallèlement à G. Donner la matrice de p dans $\mathcal{B}$.
3. Donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, et en déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

1. Soit f continue sur $\mathbb{R}$. On pose $g : x \mapsto \int_0^x f(t+x)\mathrm{d}t$. Justifier que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$: montrer que $\left|\cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!}\right| \leq \dfrac{|x|^5}{5!}$.
3. Donner la limite de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.